ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XV (1972)

STEFAN TURNAU (Kraków)

Problem dowodzenia w nowoczesnym nauczaniu matematyki

I. Pojęcie dowodu twierdzenia i jego roli w strukturze jakiejś teorii matematycznej muszą niewątpliwie być zaliczone do tego, co nazywa się metodą matematyczną; więcej: to jeden z najistotniejszych elementów tej metody. Doprowadzenie do właściwego rozumienia pojęcia dowodu trzeba więc uznać za ważny cel nauczania matematyki w szkole średniej.

Podobnie jak podanie uczniom samej definicji nowego pojęcia, bez zilustrowania jej różnorodnymi przykładami i kontrprzykładami nie prowadzi do właściwego przyswojenia tego pojęcia, tak i nie poparte odpowiednią motywacją stwierdzenie nauczyciela „żadne twierdzenie nie może być przyjęte zanim nie zostanie udowodnione" nie będzie miało większego znaczenia dla uformowania pojęcia dowodu.

Co mamy na myśli żądając, by uczeń rozumiał pojęcie dowodu i jego rolę w budowie aksjomatycznej teorii matematycznej? Wydaje się, że najistotniejsze elementy owego rozumienia, to

1° rozróżnianie twierdzenia traktowanego formalnie, a więc jako pewne „wyrażenie puste", od jego interpretacji w jakimś modelu,

2° umiejętność sprawdzania zdania-kandydata na twierdzenie w różnych modelach z pełną świadomością, że wynik tej weryfikacji może być pozytywny lub negatywny,

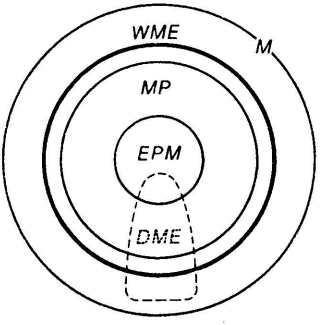
3° świadomość i rozumne uznawanie faktu, iż dowód zbudowany zgodnie z określonymi zasadami jest jedynym całkowicie pewnym argumentem dla uniwersalnej prawdziwości twierdzenia, tj. prawdziwości w każdym modelu spełniającym wszystkie aksjomaty,

4° świadomość tego, że związki wynikania pomiędzy wyrażeniami występującymi w dowodzie stanowią jedyne kryterium jego poprawności,

5° taka znajomość reguł wnioskowania, która umożliwia z jednej strony ocenę poprawności danego dowodu, z drugiej zaś — znajdowanie i redagowanie prostych dowodów.

Zanim przedstawię pewne propozycje dotyczące realizacji tak postawionego celu nauczania, ujmiemy w następujący uproszczony schemat sytuację współczesnej matematyki szkolnej (p. rys. 1).

Na schemacie tym widzimy Matematykę — dziedzinę twórczości matematyków (M), w której wyróżniono: elementy podstaw matematyki (EPM), tj. wszystkie podstawowe pojęcia logiczno-mnogościowe tworzące język matematyki — rozumiane w sposób całkowicie intuicyjny, oraz matematykę podstawową (MP), złożoną z wstępnych pojęć, aksjomatów i pierwszych twierdzeń, dotyczących najbardziej uniwersalnych struktur matematycznych (jak np. pojęcia zbioru otwartego czy transformacji liniowej, aksjomaty grupy czy przestrzeni metrycznej, twierdzenia o istnieniu bazy przestrzeni liniowej czy o konstrukcji grupy ilorazowej).



Rys. 1.

Na naszym schemacie wyróżniono jeszcze dwie części Matematyki. DME — to dawna matematyka elementarna; składa się ona z jakiejś cząstki matematyki podstawowej i obszernych, niekiedy mocno zaawansowanych fragmentów najstarszych dyscyplin matematycznych: arytmetyki, geometrii i analizy matematycznej. WME — to współczesna matematyka elementarna, która — jak przyjmiemy, a jest to zgodne z postępowymi tendencjami programów nauczania na całym świecie ([1]) — zawiera elementy podstaw matematyki, całą matematykę podstawową i niewielkie fragmenty wszystkich niemal dziedzin Matematyki.

Stosunek Matematyki do rzeczywistości, generalnie rzecz biorąc, jest trudny do określenia. Jednak w przypadku niektórych jej działów daje się on dość jasno ustalić. Związki z rzeczywistością elementów matematyki podstawowej są w większości przypadków najbardziej sztuczne, umowne, a jednocześnie najbardziej interesujące z pedagogicznego punktu widzenia. Umówiliśmy się przez matematykę podstawową rozumieć rudymenty najbardziej uniwersalnych teorii matematycznych. Opisują one struktury bardzo proste, a jako takie mogą dostarczać jedynie bardzo grubych schematów rzeczywistości; zbyt grubych, aby miały wartość praktyczną, tj. dały się zastosować do rozwiązywania realnych problemów; zbyt grubych, aby w sposób oczywisty unaoczniały związek matematyki podstawowej z rzeczywistością, jak to jest w przypadku pojęć geometrycznych czy pochodnej; trzeba mieć sporo wyobraźni, by ruch windy wcisnąć w schemat przestrzeni wektorowej.

([1]) Zob. *Programy nauczania matematyki — w świecie*, Wydawnictwo Naukowe WSP w Krakowie, Kraków 1969.

Chcąc uczyć dowodzenia w ramach dawnej matematyki elementarnej, byliśmy zmuszeni czynić to głównie na przykładach twierdzeń zaawansowanych, na ogół geometrycznych. Można wskazać co najmniej dwie wady tej sytuacji:

— interpretacja takiego twierdzenia wydaje się jedyna i oczywista, przez co poczucie prawdziwości dominuje nad zagadnieniem wywiedlności,

— matematyczna komplikacja dowodu uniemożliwia dokładną analizę jego struktury logicznej.

Pokazano w szeregu eksperymentów, że w istocie uczniowie nie rozumieli ani istoty dowodu, ani jego roli. Pojmowali go jako jeden ze sposobów przekonywania się o prawdziwości twierdzenia, przy tym sposób ani najjaśniejszy, ani najpewniejszy, ani potrzebny.

Dla realizacji naszych celów sytuacja stworzona przez współczesną matematykę elementarną jest bardzo korzystna. Oto dlaczego.

1. Teorie matematyczne, które są przedmiotem nauczania, nie są kategoryczne, dopuszczają także modele skończone. Pozwala to pokazać uczniom, że jedno i to samo zdanie może być prawdziwe w jednym modelu i fałszywe w innym. Umożliwia to również przeciwstawienie procesu pełnej weryfikacji twierdzenia — jego dowodowi.

2. Fakt, że związki między tymi teoriami a rzeczywistością są dość sztuczne, powinien zmniejszyć pokusę zastępowania dowodzenia sprawdzaniem w jakimś modelu; powinien przyczynić się do uznania przez uczniów rozumowania za postępowanie „mądrzejsze" od sprawdzania.

3. Używany obecnie język jest daleko bardziej formalny, zsymbolizowany niż dawniej, co pozwala uwypuklić formalny charakter rozumowania.

Wydaje się, że w dotychczasowej praktyce nauczania matematyki, nawet tam, gdzie programy szkolne odpowiadają scharakteryzowanej tu współczesnej matematyce elementarnej, nie wykorzystuje się należycie możliwości konstruowania różnorakich modeli dla podstawowych struktur ([2]).

II. Jak już stwierdziliśmy, przeciętny uczeń woli sprawdzać niż dedukować. Pretensje o to byłyby zupełnie bezzasadne: skłonność do opierania się raczej na faktach niż na werbalnych przesłankach jest z pewnością zdrowa. Sprawą nauczyciela i podręcznika jest przekonać ucznia, że warto czasem zrezygnować ze „szkiełka i oka" i dać pierwszeństwo logicznemu rozumowaniu. A tradycyjne nauczanie raczej mało się do tego przyczyniało.

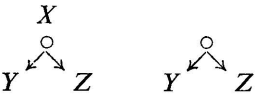
Tradycyjny sposób redagowania dowodów, gdzie wyrażenia porządkuje się liniowo, obok lub między nimi umieszczając wyjaśnienia, ma dwie istotne wady:

1. Liniowość zapisu przysłania prawdziwą strukturę dowodu, która bynajmniej nie jest liniowa.

2. Forma zapisu wysuwa na plan pierwszy zbiór wyrażeń, odwracając uwagę od związków wynikania zachodzących między nimi, co najmniej równie ważnych dla istoty dowodu.

([2]) Por. także: G. Treliński i S. Turnau, *Pierwsza lekcja stereometrii oparta na nowym ujęciu planimetrii*, „Matematyka" 4(102) (1968).

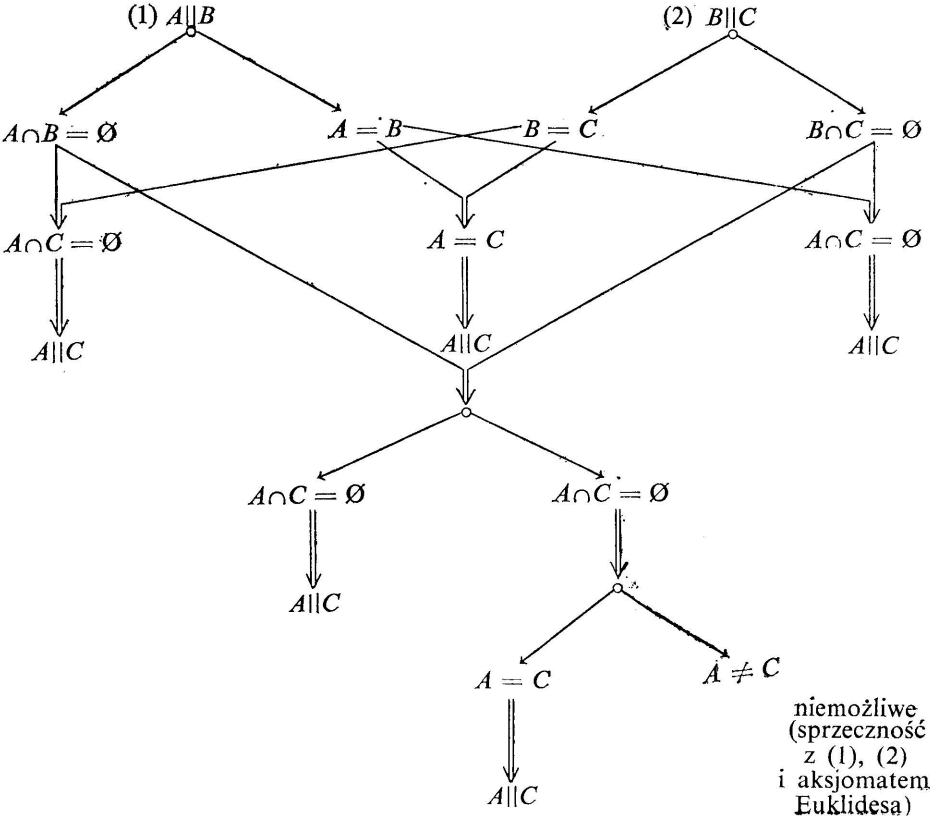
Postaram się pokazać tutaj, że ujmowanie dowodu w formie grafu jest dydaktycznie korzystniejsze. Zacznijmy od przykładu. Poniższy graf jest dowodem przechodniości relacji równoległości prostych. Zastosowano w nim następujące dwie konwencje: (a) każda strzałka, wychodząca z wyrażenia A kończy się na wyrażeniu, dla którego A stanowi jedną z przesłanek, (b) pierwsza z konfiguracji



oznacza, że uznajemy alternatywę $Y \vee Z$, jeśli uznaliśmy X, a druga oznacza, że uznajemy $Y \vee Z$ jako pewną tautologię.

Tego typu grafy dowodów zostały użyte — w sposób na tyle śmiały i w takim zakresie, że można to uznać za reformę języka matematyki — po raz pierwszy w *Geometrii* Z. Krygowskiej (PZWS 1965) i w licealnych podręcznikach geometrii tej autorki.

Istotna zaleta takiego grafu dowodu polega na unaocznieniu struktury tego dowodu, tj. wszystkich związków wynikania pomiędzy jego wyrażeniami. Przy odczytywaniu dowodu zapisanego (czy narysowanego?) w ten sposób, dostrzega



się przede wszystkim strzałki, a zatem jego schemat „topograficzny". On to właśnie kieruje lekturą; on klasyfikuje tekst, ułatwiając wyodrębnienie jego części potrzebnej dla uzasadnienia wyrażenia należącego do dowodu; on jest zapamiętywany jako „idea dowodu"; on wreszcie sprawia, że kontrola poprawności dowodu staje się łatwiejsza, gdyż pominięcie jakiegoś przypadku byłoby tu niemal od razu widoczne. Strzałki grafu grają tu rolę metajęzyka. Zastępują one mianowicie werbalne objaśnienia, towarzyszące zazwyczaj dowodom w postaci tradycyjnej, a niezbędne dla ustalenia przebiegu dedukcji. Przy tym ten nowy metajęzyk wydaje się czytelniejszy: na pierwszy rzut oka widać tu, że „X i Y pociąga Z", podczas gdy podobna informacja werbalna zmusza do odszukania X i Y dla porównania ich z Z.

Schemat ten czyni też nie tylko możliwym, ale wręcz łatwym to, co jest bardzo trudne w odniesieniu do tekstu tradycyjnego: lekturę w odwróconej kolejności. Możemy więc stwierdzić najpierw, że mamy pięć wniosków ($A||C$), z których wszystkie są pożądane; czy wszystkie są należycie uzasadnione? czy rozważono wszystkie możliwe przypadki? Odpowiedzi na te pytania znajdziemy, śledząc łańcuchy strzałek „z dołu do góry".

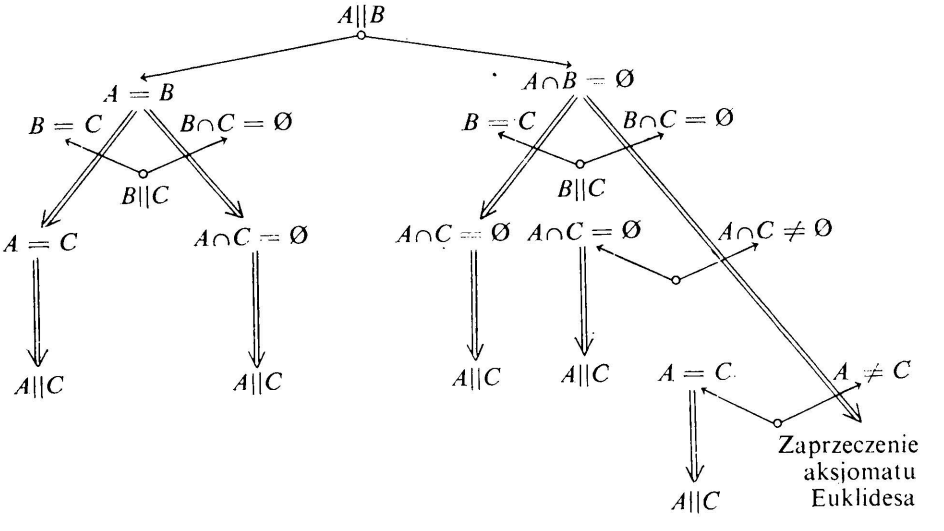
Inna zaleta dydaktyczna grafu opiera się na jego kształcie geometrycznym. W naszym przykładzie symetria górnej części grafu sugeruje występowanie w rozumowaniu fragmentów identycznych pod względem logicznym, gdy asymetria jego dolnej części wskazuje na fragment niebanalny.

Ten język strzałek może być uzupełniony przez dopuszczanie dodatkowych konwencji, byle tylko były one proste i operytywne. Oto jedna z takich konwencji (stosowana również w podręcznikach Z. Krygowskiej).

$$X \xrightarrow{\quad Z \quad} Y \quad \text{znaczy:} \quad Z \Rightarrow (X \Rightarrow Y),$$

$$X \xleftarrow{\quad Z \quad} Y \quad \text{znaczy:} \quad Z \Rightarrow (X \Leftarrow Y).$$

Umożliwia ona zapisanie dowodu z ostatniego przykładu w sposób następujący:

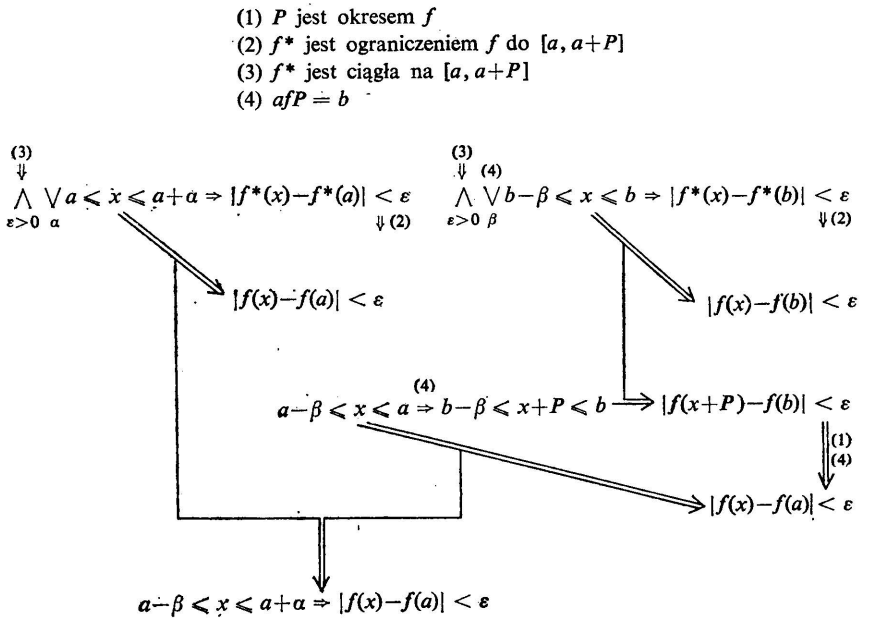


Konwencja ta zmniejsza więc rozmiary grafu, pozwalając zapisywać w tej postaci także bardziej złożone rozumowania.

W wielu dowodach bądź to przekształca się tylko część złożonego wyrażenia, bądź też korzysta się z wyników pośrednich przez dokonywanie w nich podstawień. W takich wypadkach zwykła przechodniość implikacji nie wystarcza już jako prawo logiczne. Dla narysowania grafu takiego dowodu konieczna jest subtelniejsza konwencja. Można przyjąć umowę następującą: strzałka zaczyna się i kończy w pobliżu głównego symbolu (symbolu predykatywnego, funktora lub kwantyfikatora) wyrażenia, które stanowi jej „punkt wyjściowy" lub „punkt wejściowy".

Za przykład zastosowania tej konwencji posłuży schemat dowodu następującego znanego twierdzenia:

TWIERDZENIE. *Rozważmy funkcję f, określoną na $\boldsymbol{R}$, o okresie P. Przypuśćmy, że ograniczenie f^* funkcji f do przedziału $[a, a+P]$ jest ciągłe. Wówczas funkcja f jest ciągła w a* (f jest wówczas ciągła oczywiście w każdym punkcie $x \in \boldsymbol{R}$, lecz tylko jej ciągłość w a jest nieoczywista; graf dowodu poniżej:



Rzecz prosta, nie jest możliwe, a także potrzebne przedstawianie każdego dowodu w postaci grafu. Uczeń, który istotę dowodu zrozumiał, odczyta go prawidłowo także z tekstu tradycyjnego. Warto jednak dorzucić na koniec pewną uwagę natury pedagogicznej. Skonstruowanie grafu rozumowania, danego w formie tradycyjnej, bynajmniej nie jest problemem tylko graficznym. Dla rozwiązania go trzeba rozumowanie to bardzo skrupulatnie przeanalizować. Jest to więc, być może, sposób na zrozumienie i nauczenie się dowodu — bez łez.