np. Definicje 5. 1 i 5. 2 na str. 18. Rozdział 2 części I poświęca autor omówieniu pojęcia rozmaitości różniczkowej oraz kilku konkurujących między sobą sposobów wprowadzenia odpowiednika grupy przekształceń w programie Kleina. Strukturą różniczkową klasy C_r na rozmaitości nazywa autor zbiór atlasów równoważnych klasy C_r. Następnie, w definicji 3. 2 (str. 31) n-wymiarową rozmaitość różniczkową (u autora: różniczkowalną) definiuje autor jako rozmaitość topologiczną opatrzoną strukturą klasy C_r i w tej samej definicji czytamy: „układy współrzędnych należące do wyróżnionej struktury nazywamy dopuszczalnymi dla danej rozmaitości." Zgodnie jednak z definicją autora układy współrzędnych nie mogą należeć do struktury klasy C_r, gdyż elementami struktury są atlasy, nie zaś układy współrzędnych, które autor utożsamia z mapami. Łatwo można byłoby takiej formalnie niewygodnej sytuacji uniknąć, wprowadzając pojęcie struktury klasy C_r na danej rozmaitości topologicznej jako atlasu maksymalnego tej klasy.

Część II skryptu, poświęcona teorii obiektów geometrycznych, jest zredagowana tak, aby jej przestudiowanie nie wymagało uprzedniego przeczytania części I. Rozpoczyna ją autor podaniem definicji obiektu geometrycznego. Przyjęta za A. Wundheilerem definicja obiektu geometrycznego jest taka, że wektor styczny do rozmaitości różniczkowej w danym punkcie pod definicję tę nie podpada. Z tego właśnie powodu wydaje mi się, że Wundheiler po prostu nie zwrócił uwagi na to, że — eksponując zależność współrzędnych obiektu w jednym lokalnym układzie od współrzędnych w drugim i transformacji prowadzącej od jednego z nich do drugiego — należy także uwzględnić współrzędne punktu w jednym z tych układów. Uwaga Z. Mosznera dotycząca obiektu zaczepionego, o której pisze dalej autor, opublikowana w 1968 r., była — jak się wydaje — koniecznym sprostowaniem tego niedopatrzenia Wundheilera. Drugim najbardziej podstawowym pojęciem tej części skryptu jest pojęcie komitanty obiektu. Zgodnie z definicją 14. 1 (str. 88) obiekt σ nazywa się komitantą obiektu ω, jeżeli istnieje funkcja $\sigma = H(\omega)$, która odwzorowuje włókno obiektu ω na włókno obiektu σ. W definicji tej chodzi naprawdę nie o funkcję H, która przyporządkowuje obiektowi ω obiekt σ, lecz o funkcję H taką, że dla każdego lokalnego układu współrzędnych u dopuszczalnego dla obiektu ω układ u jest dopuszczalny dla obiektu σ i zachodzi równość $\sigma(u) = H(\omega(u))$, przy czym każdy układ u dopuszczalny dla obiektu σ jest dopuszczalny dla obiektu ω, tzn. $\sigma = H \circ \omega$ (kółko $\circ$ oznacza tutaj superpozycję funkcji). W skrypcie poza tym powszechnie używa się wymiennie funkcji i jej wartości w punkcie, co, rzecz jasna, dla dojrzałego czytelnika nie stanowi problemu. Dalsza część wykładu dotyczy w głównej mierze klasyfikacji obiektów geometrycznych prowadzonej metodą równań funkcyjnych z punktu widzenia teorii komitant. Nie informuję w tym miejscu szczegółowo o wynikach przedstawionych w dalszej części sktyptu, ani też o kilku potrzebnych mutacjach pojęcia obiektu czy komitanty w niej zawartych, proponując czytelnikowi tej recenzji przeczytanie bądź tylko przeglądnięcie tekstu, interesującego zwłaszcza dla matematyka pragnącego zapoznać się z dorobkiem krakowskiej szkoły teorii obiektów geometrycznych. Niektóre uwagi zamieszczone w I części, jak np. o przedmiocie geometrii, wydają się tak interesujące, że zachęcić mogą do przeczytania skryptu w całości.

Spostrzeżenia krytyczne, które poczyniłem, są natury raczej technicznej. Jeżeli nawet skrypt przedstawia nieco do życzenia właśnie od strony warsztatowej, to całkowicie wynagradza czytelnikowi te usterki jego syntetyzujący charakter szkicu do monografii dającej jeszcze jeden ślad dorobku badawczego dużego zespołu matematyków pracujących wspólnymi metodami.

Włodzimierz Waliszewski

Julian Musielak, *Wstęp do matematyki*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1970, str. 128, cena zł 18.—

Podręcznik ten, przeznaczony dla studentów pierwszego roku matematyki w uniwersytetach i wyższych szkołach pedagogicznych, jest rozszerzoną wersją skryptu wydanego pod tym samym tytułem w Poznaniu w 1967 r. przez Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Adama Mickiewicza.

Przedmiot o nazwie *Wstęp do matematyki*, który będę w dalszym ciągu nazywał krótko *Wstępem*, objęty jest, w wymiarze 30 godzin wykładu i tyluż godzin ćwiczeń, programem obowiązującym wszystkich studentów matematyki w pierwszym semestrze studiów. Według pierwotnego zamierzenia miał to być pomost między matematyką szkolną a uniwersyteckim jej ujęciem. Wstęp miał ułatwić pokonanie wysokiego progu trudności, jakie początkującym nastręcza zrozumienie wykładów analizy matematycznej i abstrakcyjnej algebry oraz stosowanych tam metod rozumowania. Dlatego trzon materiału objętego *Wstępem* stanowiły elementy logiki matematycznej i teorii mnogości w ujęciu propedeutycznym, szczególny zaś nacisk został położony na praktyczne opanowanie elementów rachunku logicznego i ich zastosowania do zagadnień zaczerpniętych z innych przedmiotów matematycznych wykładanych na pierwszym roku. Koncepcja ta straciła niemało ze swej aktualności po reformie nauczania matematyki w szkole podstawowej i średniej, a materiał przewidziany programem szczegółowym *Wstępu* stał się w dużej mierze tylko powtórzeniem pewnych partii programu licealnego. Całkowicie nowy jest właściwie tylko fragment teorii liczb kardynalnych, ujęty w programie *Wstępu* powierzchownie i zdawkowo.

W praktyce jednak, w większości uniwersytetów, przedmiot zwany *Wstępem* jest traktowany jako coś w rodzaju namiastki usuniętych z dawniejszego programu wykładów z zakresu teorii mnogości, które stanowiły część pierwszą przedmiotu kursowego o nazwie *Wstęp do teorii mnogości i topologii* na drugim roku. Przyczyniło się do tego istnienie znakomitych, szeroko spopularyzowanych podręczników do teorii mnogości i logiki matematycznej. Ostatecznie, raczej wbrew pierwotnym intencjom, stał się *Wstęp do matematyki* nie tyle pomostem i pomocą, ile dodatkowym obciążeniem w i tak nadmiernie już przeładowanym, trudnym programie pierwszego roku studiów matematycznych, a egzamin ze *Wstępu* — jednym z narzędzi selekcji studentów, obok tzw. zaliczeń ćwiczeń z innych przedmiotów matematycznych i niematematycznych.

Jest rzeczą oczywistą, że po reformie matematyki szkolnej pierwotna koncepcja *Wstępu* nie mogła się utrzymać w całej rozciągłości i że poziom naukowy wykładów z tego przedmiotu mógł podnieść się odpowiednio do tego, co nastąpiło w liceum. Z drugiej jednakże strony sama już nazwa przedmiotu: *Wstęp do matematyki*, wskazuje wyraźnie na to, że nie powinien on być dodatkową linią zasieków broniących ludziom przeciętnie uzdolnionym dostępu do zakazanego ogrodu matematyki. I dlatego, pomimo istnienia świetnych książek ujmujących elementy logiki matematycznej i teorii mnogości w sposób naukowy i bardzo precyzyjny, istniała wciąż potrzeba dobrego podręcznika do *Wstępu*, odpowiadającego rozmiarami i ceną skromnej liczbie godzin lekcyjnych przeznaczonych na ten cel w obowiązującym programie, przystępnością zaś ujęcia dydaktycznego rzeczywistej sytuacji większości osób rozpoczynających w najlepszej wierze swe studia matematyczne i łączących z nimi wielkie nadzieje życiowe.

Książka J. Musielaka była uczciwą próbą napisania takiego właśnie podręcznika. Ale, doceniając w pełni trud i ryzyko autora oraz niewątpliwą wartość dydaktyczną dużych partii książki i piękno matematyczne niektórych jej fragmentów mniej elementarnych, trudno by było jednak uznać ten eksperyment bez zastrzeżeń za całkowicie udany, gdyż obok cennych zalet dzieło to ma istotne wady i jest jeszcze niedopracowane pod względem metodycznym i redakcyjnym. Omawiając w dalszym ciągu te sprawy, ograniczę się do rzeczy, które uważam za najbardziej zasadnicze. Drobniejsze niedopatrzenia i usterki potraktuję wybiorczo, poprzestając na wyrywkowych przykładach.

Ponieważ elementy logiki matematycznej stanowią jeden z głównych tematów *Wstępu*, więc zacznę od rozdziału drugiego, pozostawiając na razie na uboczu pierwszy. Za główną wadę tego rozdziału uważam niekonsekwencję terminologii, utrudniającą czytanie i rozumienie tekstu. Autor stosuje pewne podstawowe terminy w sposób nie zawsze zgodny z powszechnie przyjętym, a co gorsze — niejednoznaczny. I tak nazwa „zdanie" jest w tym rozdziale używana zarówno, gdy mowa o zdaniach w powszechnie przyjętym rozumieniu, a więc wypowiedzi, którym przysługuje jednoznaczna ocena logiczna: prawda lub fałsz, jak i wtedy, gdy chodzi o wypowiedzi w rodzaju „$2x + 7 = 12$" lub „proste l i m przecinają się", a więc o funkcje zdaniowe w zwykłym sensie. Termin „funkcja zdaniowa" został na początku określony w zwykły sposób. Zaraz potem jednak — i bez wyraźnego ostrzeżenia czytelnika — zaczyna być rozumiany w znaczeniu wyrażenia zbudowanego

z liter p, q, r, s, czyli zmiennych zdaniowych i funktorów (zresztą terminu „zmienna zdaniowa" autor w ogóle nie wprowadza), np. $(p' \Rightarrow p) \Rightarrow p$. Tautologie są to więc — cytuję — „funkcje zdaniowe prawdziwe dla dowolnych wartości logicznych zdań, z których są zbudowane" (str. 23, w. 14 i 15). Podobnie w zadaniu 4 (str. 29) czytamy: „Sprawdzić, które z następujących funkcji zdaniowych są tautologiami:

a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ itd."

Ale i to nie jest konsekwentne, bo na str. 23 (w. 7) czytamy: „zdanie $(q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$..."

Funktory zostały wprowadzone jako odpowiedniki spójników języka naturalnego w sposób tak sugestywny, że czytelnik łatwo uwierzyć może w wyższą konieczność takiego właśnie, a nie innego sposobu określania funktorów tabelkami zer i jedynek. Nie ma w tekście ani wzmianki o istniejących rozbieżnościach mowy naturalnej i sztucznego języka matematyki, o tym np., że język potoczny w ogóle nie zna jakiegoś, choćby przybliżonego, odpowiednika, znaku $\Leftrightarrow$, że spójnik „lub" jest potocznie używany nie tylko w sensie znaku alternatywy „$\vee$", lecz także — i chyba nawet częściej — w znaczeniu dysjunkcji zupełnej „$\div$", określonej tabelką: $0+1 = 1+0 = 1$, $0+0 = 1+1 = 0$. Przeciwnie, przystępując do określenia funktorów alternatywy i równoważności, stwierdza autor, że „pierwszy z nich odpowiada spójnikowi *lub*, a drugi *jest równoważne*, oznaczamy je odpowiednio $\vee$ i $\Leftrightarrow$" (str. 22, w. 4 i 5). Mocno akcentowana teza o odpowiedniości między funktorami a spójnikami mowy potocznej została poparta przykładami, które rzeczywiście brzmią przekonywająco i naturalnie dzięki temu, że pod nazwą zdań przemycone tam zostały funkcje zdaniowe, w których występują zmienne, jak np. w przykładzie na str. 20, gdzie zmiennymi są — przynajmniej dla ucha — imiona, choć pisze się je z dużej litery. Natomiast unika autor w ogóle przykładów drastycznych w rodzaju: „jeżeli 2 jest liczbą parzystą, to Warszawa jest stolicą Polski".

Uważam, że tak uproszczone ujęcie tematu jest ułatwieniem pozornym i w istocie rzeczy dość szkodliwym, gdyż na wykładach z analizy matematycznej lub algebry studenci spotykają się często z użyciem funktorów w takich sytuacjach, gdzie potoczny ich sens kończy się i działa już tylko umowa przyjęta w matematyce, sztucznie rozszerzająca lub zwężająca granice stosowania „lub", „jeżeli..., to " itp. Wiadomo dobrze, że wiele błędów rozumowania, popełnianych przez początkujących studentów matematyki wypływa z nieuświadomienia sobie odmienności sztucznego języka rachunku zdań od języka naturalnego.

Oprócz zero-jedynkowej metody, zwykłej i skróconej, sprawdzania czy dane wyrażenie rachunku zdań (autor pisze zwykle „funkcja zdaniowa") jest tautologią, podane są w tym rozdziale dwa przykłady wyprowadzania nowych tautologii z już znanych. Nie sprecyzowana bliżej metoda polega na stosowaniu łańcuchów równoważności „$\equiv$", których sens określa warunek

$$A \equiv B \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad A \Leftrightarrow B \quad \text{jest tautologią.}$$

Autor nie wprowadza tu zresztą żadnego nowego znaku i stosuje dalej symbol „$\Leftrightarrow$", już oczywiście w nowym sensie. Rozumienie tych epizodycznych rachunków utrudnia wzrokowo bardzo nieprzejrzysty sposób wplatania do tych łańcuchów równoważności liczb w podwójnych aż nawiasach dla oznaczenia, na którym z poprzednich wzorów oparto się w danym miejscu.

Nie wątpię, że metoda takich łańcuchów da się w sposób ścisły sprowadzić do jakichś prostych i precyzyjnych metod opartych na regułach dedukcji, i może nic wielkiego się nie stało, że takie sposoby zostały mimochodem zaproponowane jako coś w rodzaju zagadki pobudzającej do samodzielnego myślenia. Znacznie bardziej mnie jednak zaniepokoiła wypowiedź o rachunku zdań na str. 27 (w. 13), dotycząca tych bliżej nie sprecyzowanych metod dedukcji: „Wyprowadzanie nowych tautologii za pomocą już znanych daje podstawę do innego podejścia do rachunku zdań, mianowicie do podejścia aksjomatycznego. Kilka tautologii wybiera się jako aksjomaty ..." Informacja ta jest tak sformułowana, że nie sposób ją obalić, choć nie wiadomo właściwie, co autor miał tu na myśli, tym bardziej że nie wspomniał w ogóle o czymś takim, jak reguły wnioskowania lub definiowania w systemie dedukcyjnym, odstępując tu — nie wiem, czy słusznie — od typowych wzorów podręcznikowych.

Przykłady zastosowań twierdzeń logicznych miały, jak sądzę, być istotnym elementem w budowie książki. Niestety, niektóre z nich wydają się dość sztuczne, skoro trudniej jest tam zrozumieć,

na czym polega w danym przykładzie zastosowanie tej, czy innej tautologii niż sam dowód. Bywa, że dowód jest oczywisty i przejrzysty, a tautologię, o którą chodzi, trzeba dopiero z trudem wyławiać i to w sposób nie zawsze przekonywający i jednoznaczny. Pozostawiając jednak na uboczu pytanie czy przykłady na zastosowanie tautologii są rzeczywiście pouczające, zatrzymam się na przykładzie 1 na str. 27. Otóż dowód niewymierności pierwiastka kwadratowego z liczby 2 nie może się opierać na tautologii $((p' \Rightarrow p) \Rightarrow p)$ w sposób sugerowany przez autora, z tego prostego powodu, że posłużył on się błędną tezą, podstawiając za p' zdanie:

„$\sqrt{2}$ jest niewymierny, tj. jest ułamkiem nieskracalnym". Tymczasem $\sqrt{2}$ nie jest ani ułamkiem nieskracalnym, ani ułamkiem skracalnym, ani żadnym w ogóle ułamkiem, bo jest liczbą rzeczywistą, podczas gdy każdy ułamek jest parą liczb całkowitych (lub napisem zbudowanym z symboli dwu liczb całkowitych) i właśnie tylko dzięki temu można z sensem mówić o jego skracaniu. A naprawdę schemat dedukcji jest w tym przykładzie dosyć złożony, bo co prawda można go np. oprzeć na prostej tautologii

$$[(p' \Rightarrow q) \wedge q'] \Rightarrow p,$$

ale za to na mniej prostych podstawieniach

$$p\colon \sqrt{2} \text{ jest niewymierny,}$$

$$q\colon \bigvee_{m,n \in N_0} [\sqrt{2} = \frac{m}{n} \wedge (m, n) = 1],$$

skąd

$$q'\colon \bigwedge_{m,n \in N_0} [\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow (m, n) \neq 1].$$

Natomiast w części arytmetycznej dowodu wykazuje się, że $p' \Rightarrow q$ oraz q'. Teraz można zastosować tryb (regułę dedukcji) odrywania:

$$\frac{p' \Rightarrow q, q', [(p' \Rightarrow q) \wedge q'] \Rightarrow p}{p},$$

co kończy tak spreparowany dowód. Nie wyobrażam sobie, jak w dowodzie tego rodzaju mogłoby się obejść bez kwantyfikatorów, ale też i nie wierzę, by takie łamańce myślowe mogły komukolwiek ułatwić zrozumienie dowodów prostych i trafiających bezpośrednio do intuicji. Nie jeździ się po małym ogródku samochodem i używa się go dopiero tam, gdzie same nogi już nie doniosą. Sądzę, że symbolika logiczna staje się rzeczywistym ułatwieniem tam dopiero, gdzie złożoność rozumowania utrudnia ogarnięcie go jednym aktem myśli. Nietrudno o takie przykłady już w elementarnej analizie matematycznej, ale tam trzeba mieć oczywiście do dyspozycji aparat rachunku logicznego z kwantyfikatorami. Z tej więc przyczyny uważam dyskusję zastosowań już w rozdziale II za przedwczesną. Rzeczywiście przykłady podane w rozdziale III omawianej książki wydają się bardzo pouczające i wartościowe z punktu widzenia dydaktycznego.

Z podobnych przyczyn nie zatrzymam się dłużej na zadaniach do rozdziału II. Parę słów jednak o zadaniu 8c (str. 31), którego rozwiązanie zawiera błąd, czy też przeoczenie, gdyż wcale nie widać, jak z zanegowania przesłanki

$$p\colon \text{„jest więcej niż } n \text{ liczb pierwszych"}$$

można by było wydobyć samo p. Jeżeli liczb pierwszych jest m i $m \leqslant n$, to podane w książce rozumowanie prowadzi tylko do tego, że liczb pierwszych jest więcej niż m, a więc co najmniej $m+1$. Brak jednak podstaw do twierdzenia, że $m+1 > n$ i tu właśnie cała interpretacja logiczna rozkleja się, mimo uderzającej oczywistości rozumowania przedstawionego językiem potocznym.

Pomijając na razie subtelniejsze kwestie natury matematycznej, do których jeszcze powrócę w dalszym ciągu tego referatu, dowód podany w tym zadaniu można by z grubsza ująć w następujący schemat: Należy dowieść, że prawdziwe jest zdanie

$$\{\bigvee_n [\overline{\overline{O}}_n = \overline{\overline{P}}]\}' \equiv \{\bigwedge_n (\overline{\overline{O}}_n = \overline{\overline{P}})'\},$$

gdzie P jest zbiorem liczb pierwszych, a $O_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Metodą Euklidesa dowodzi się, że

$$\overline{\overline{P}} = \overline{\overline{O}}_n \Rightarrow \overline{\overline{P}} > \overline{\overline{O}}_n,$$

a więc, że

$$\overline{\overline{P}} = \overline{\overline{O}}_n \Rightarrow (\overline{\overline{P}} = \overline{\overline{O}}_n)'.$$

Stąd za pomocą tautologii $(p' \Rightarrow p) \Rightarrow p$ i reguły odrywania dostajemy $(\overline{\overline{P}} = \overline{\overline{O}}_n)'$, a następnie metodą uogólnienia (tj. przez dopisanie dużego kwantyfikatora) tezę, o którą chodziło:

$$\{\bigvee_n [\overline{\overline{O}}_n = \overline{\overline{P}}]\}'.$$

Okazuje się więc, że i tu potrzebne są kwantyfikatory. Zresztą autor wraca jeszcze do twierdzenia Euklidesa w rozdziale następnym, gdzie podaje nieco inny dowód, tym razem z zastosowaniem obu kwantyfikatorów, mianowicie dowodzi tam, że istnieją liczby pierwsze większe od dowolnej liczby naturalnej n. Ten drugi wariant dowodu jest pojęciowo prostszy i może być intuicyjnie jasny bez wyraźnego pojęcia zbioru skończonego. W obu miejscach jednak autor antycypuje definicje skończoności i nieskończoności, które w podręczniku zjawiają się — w formie bardzo zresztą zdawkowej — dopiero znacznie dalej, przy końcu książki.

Rozdział III o kwantyfikatorach nie budzi już tylu wątpliwości. Pomijając takie drobnostki, jak „x jest człowiekiem wyższym niż 2 metry" lub „ciąg jest monotoniczny, gdy jego wyrazy stale rosną albo stale maleją", chciałbym poruszyć tylko sprawę zapisu wyrażeń z kwantyfikatorami. Nie zauważyłem bowiem nigdzie w tekście książki wyraźnego sformułowania reguł używania nawiasów w takich wyrażeniach. Powoduje to niemożność jednoznaczego odczytania wielu formuł. Z niektórych zapisów można by wnioskować, że działanie kwantyfikatora ma sięgać na prawo aż do najbliższego nawiasu zamykającego, np. „)", lub do samego końca formuły (wzory na str. 42). Inne miejsca skłaniają do mniemania, że kwantyfikator powinien działać raczej tylko do najbliższego znaku implikacji lub równoważności logicznej (str. 38), albo też, że stosuje się jeszcze jakieś inne milczące założenia (str. 36). Tej sprawy nie udało mi się do końca rozszyfrować, pomimo starannego konfrontowania wzorów z towarzyszącym im tekstem słownym. Usterka ta utrudnia właściwe zrozumienie intencji autora w tematach wielu zadań. Wiersze 14 i 15 str. 34 wyrażają tezę niejasną, bo np. wyrażenie $\bigwedge_x \bigwedge_y \bigvee_z (2+z = 4)$ jest równie sensowne, jak $\bigwedge_x \bigwedge_y \bigvee_z (x+z = y)$. Warto może zauważyć, że w tym rozdziale termin funkcja zdaniowa jest rozumiany w zwykłym sensie, a więc inaczej niż w rozdziale II z wyjątkiem jego początku.

Rozdział IV poświęcony zbiorom, relacjom i funkcjom, jest napisany przystępnie, jasno i zwięźle. Jest bogato zilustrowany rysunkami. Miałbym tylko może pewne zastrzeżenia co do sposobu sformułowania definicji relacji (str. 53), która jest poprawna, ale nieco zaciemniona uwagami historycznymi i metodologicznymi, które w takim zestawieniu mogą robić niepotrzebne wrażenie chwiejności i niepewności: czy relacja jest czymś scharakteryzowanym przez podzbiór iloczynu kartezjańskiego, czy też — co ostatecznie było intencją autora — relacja jest wprost podzbiorem iloczynu kartezjańskiego?

W bardzo pouczającym paragrafie 5 rozdziału IV nie została omówiona bliżej sprawa definicji dzielenia, nastręczająca pewne kłopoty w metodzie Cantora definicji liczb rzeczywistych za pomocą ciągów liczb wymiernych spełniających warunek zbieżności Cauchy'ego, oraz równie kłopotliwa sprawa definicji nierówności liczb rzeczywistych, którą może wygodniej byłoby sprowadzić do definicji liczby rzeczywistej dodatniej. W obu przypadkach można się posłużyć twierdzeniem, że

ciąg liczb wymiernych spełniający warunek Cauchy'ego i nie mający granicy zero, ma wyrazy, od pewnego wskaźnika począwszy, stale większe od jakiejś liczby dodatniej lub stale mniejsze od pewnej liczby ujemnej. Z drobnych usterek tego rozdziału wymienię niejasność zadania 21, w którym chodziło o porządek liniowy, i błędne rozwiązanie zadania 22a.

Dużą wartość dydaktyczną ma, moim zdaniem, rozdział V, napisany przystępnie i żywo, zawierający bardzo ładne przykłady i liczne trafne rysunki. Ale równocześnie ten właśnie rozdział nasuwa może najwięcej wątpliwości i to natury poważniejszej niż wszystko to, co poruszyłem poprzednio. Chodzi o problem porównywania liczb kardynalnych, rolę pewnika wyboru i pojęcie liczby naturalnej. Otóż trzymając się ściśle szczegółowego programu *Wstępu*, mógł autor w ogóle zaniechać wkraczania na te grząskie tereny. Jeśli jednak został już poruszony którykolwiek z tych zawiłych i subtelnych tematów, to czytelnik powinien otrzymać przynajmniej niedwuznaczne, poprawne i w miarę możności jasne informacje o rzeczywistym stanie rzeczy. Uważam natomiast, że wszelkie zacieranie niejasności, milczące odwoływanie się do intuicji, która tu zawodzi na całej linii, przemilczanie istotnych trudności tkwiących w naturze rzeczy, może prowadzić do błędnych wyobrażeń na temat tego, o czym tekst miał informować. Uważałbym w takich przypadkach całkowite, świadome niezrozumienie tekstu przez czytelnika za znacznie mniejsze zło niż pozostawienie go pod wrażeniem, że wszystko dobrze rozumie i że wszystko jest dla niego oczywiste, podczas gdy w rzeczywistości czytelnik uległ sugestii analogii, które naprawdę nie istnieją.

Żeby nie być gołosłownym, zacytuję zdanie ze str. 90 (w. 10. od dołu): „Moce zbiorów, tj. liczby kardynalne można porównywać". Zdanie to może się naiwnemu czytelnikowi wydać truizmem, bo skoro liczby, to przecież zawsze jedna jest większa lub mniejsza niż druga, jeżeli nie są sobie równe. A właśnie tu zmysł analogii całkowicie zawodzi i problem porównywania liczb kardynalnych, a w szczególności liczb naturalnych pojmowanych jako liczby kardynalne, nastręcza, jak wiadomo, poważne trudności teoretyczne i nie może tu być mowy o jakiejś oczywistości.

W innym miejscu czytamy: „Liczby kardynalne zbiorów skończonych nazywamy liczbami naturalnymi" (str. 79, w. 10). Kilka stronic dalej następuje dopiero wyjaśnienie, że zbiór skończony, to taki, który nie jest nieskończony w sensie definicji Dedekinda, to znaczy nie jest równoliczny z żadną swą częścią właściwą. I tu, na tle obrazowych przykładów zbiorów przeliczalnych, mogą powstawać intuicje wiodące na manowce, bo aczkolwiek definicja Dedekinda zbioru nieskończonego prowadzi od razu do różnych łatwych wniosków, np. do twierdzenia, że każdy zbiór nieskończony w sensie tej definicji zawiera podzbiór równoliczny ze zbiorem uporządkowanym w typ ω, a więc z intuicyjnie pojętym zbiorem liczb naturalnych, to jednak zaprzeczenie tego warunku nieskończoności dopiero w oparciu o teorię dobrych porządków, zbudowaną na bazie aksjomatu wyboru, prowadzi do przydatnych twierdzeń. Po odrzuceniu aksjomatu wyboru nie udałoby się wyprowadzenie podstawowych własności liczb naturalnych z definicji podanej przez autora. Ostatecznie i tu czytelnik może dojść do stanu pozornego rozumienia, o co chodzi. Jednakże ten pozór rozumienia, będąc czymś całkowicie nieprzydatnym, może stać się źródłem jakichś zupełnie fałszywych wyobrażeń i działać jak informacja całkowicie błędna.

Chciałbym się tu zastrzec, że bynajmniej nie uważam za konieczne kładzenie specjalnego nacisku na wyróżnioną historycznie rolę aksjomatu wyboru i związane z nią nawyki myślowe. Równie dobrze przecież można by np. kłaść nacisk na rolę aksjomatu VI o zbiorach potęgowych, który w aksjomatyce Zermela prowadzi do nieskończonej hierarchii zbiorów nieskończonych coraz wyższych mocy. Idzie mi raczej o to, że w przypadku przytaczania trudnego twierdzenia bez dowodu czytelnik powinien być wyraźnie informowany o tym, że dowód został pominięty, nie mówiąc już o przydatności pewnych dalszych komentarzy. Np. pisząc, że „liczby kardynalne można porównywać", wypadało dodać wyjaśnienie, że dowód, bardzo skomplikowany, nie mieściłby się w ramach podręcznika. Lecz warto wspomnieć i o tym, że dowód ten wymagał rozwinięcia obszernego rozdziału teorii zbiorów, a mianowicie teorii dobrych porządków. Tego rodzaju informacje powinny były poprzedzać podaną w książce wzmiankę o hipotezie continuum, jak również informację o definicji liczby naturalnej jako mocy zbioru skończonego w sensie Dedekinda. To ostatnie wymagałoby jednak ujęcia bardziej precyzyjnego i bardziej wyraźnego niż w omawianej książce.

I tu przechodzę do największej, moim zdaniem, wady podręcznika, którą jest brak jasnej i zdecydowanej koncepcji liczby naturalnej. Chociaż chodzi tu o temat nie objęty bardzo elementarnym programem *Wstępu*, który w tym podręczniku w ogóle nie musiał być poruszany, to jednak źle się stało, że poruszywszy ten temat nie zajął autor wobec niego wyraźnego, jednoznacznie określonego stanowiska. A miał wiele dróg do wyboru. Mógł zgodnie z literą i duchem programu pozostać przy naiwnym pojęciu liczby naturalnej i nie zapuszczając się w metodologiczne głębie potraktować cały pierwszy punkt tego programu jako powtórzenie poznanych w szkole twierdzeń z zakresu arytmetyki, ze szczególnym naciskiem na zasadę indukcji zupełnej i jej zastosowania, choćby w rachunku na „sigmach". Mógł nie poprzestać na tym, tylko podać aksjomatyczno-dedukcyjną teorię liczb naturalnych, najlepiej taką, w której suma i iloczyn są pojęciami pierwotnymi, bo taka teoria jest pojęciowo prostsza niż np. aksjomatyka Peana, w której działania określa się rekurencyjnie. Ujęcie to pasowałoby dobrze do tych ustępów książki, gdzie naszkicowane są klasyczne metody konstruowania liczb całkowitych, wymiernych i rzeczywistych. Mógł ostatecznie autor wyjść z aksjomatyki liczb rzeczywistych, określić na ich gruncie zbiór liczb naturalnych i dowodzić ich własności łącznie z zasadą indukcji zupełnej, co jednak byłoby rozwiązaniem o tyle gorszym, że podejście to wymaga znacznie mocniejszych środków logicznych, choć można to oczywiście do pewnego stopnia zatuszować w wykładzie o charakterze poglądowo-intuicyjnym.

Mając już do dyspozycji liczby naturalne, można w sposób bardzo przystępny określić pojęcie skończoności i nieskończoności, przyjmując, że zbiór A jest skończony wtedy i tylko wtedy, gdy jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych nie większych niż jakaś liczby naturalna n, którą przyjmuje się za nazwę liczby kardynalnej zbioru A. Ujęcie to, zbliżone do definicji B. Russela, nastręcza wiele wdzięcznych tematów zadaniowych i łączy się gładko z partią materiału dotyczącą zbiorów przeliczalnych.

Konsekwentne przedstawienie sprawy w oparciu o pojęcie zbiorów skończonych w sensie definicji Dedekinda, która oczywiście jest całkowicie zbędna w ujęciu poprzednim, wymagałoby przytaczania wielu fundamentalnych twierdzeń bez dowodów oraz wielu skomplikowanych komentarzy tak, że koncepcję tego rodzaju należałoby raczej uznać za chybioną w książce, gdzie nie omawia się w ogóle teorii liczb porządkowych. Ale i to byłoby już znacznie lepsze niż umieszczanie w jednym wykładzie strzępków różnych obcych sobie wątków, jak to ma miejsce w omawianym podręczniku. Podana tam definicja liczby naturalnej nie prowadzi do nikąd. W różnych zadaniach i przykładach, choćby w dowodach twierdzenia Euklidesa o liczbach pierwszych, nawiązuje autor do definicji B. Russela, lub do związanych z nią oczywistych twierdzeń całkowicie zresztą zgodnych z naiwną intuicją. Z tego pomieszania pojęć wynikają m. in. tak rażące usterki, jak np. zadanie 23, i jego enigmatyczne rozwiązanie wyrażone małym słówkiem „tak" na str. 124 (chwila namysłu wystarczy, by zauważyć, że zadanie to jest w danym kontekście w ogóle pozbawione sensu, nie mówiąc o tym, że czytelnik może nie mieć do dyspozycji informacji, że każdy zbiór skończony w sensie Dedekinda da się dobrze uporządkować).

Te same niekonsekwencje odbiły się niekorzystnie na poziomie rozdziału I, który oprócz bardzo ładnego tematu twierdzeń podobnych do zasady indukcji zawiera jej dowód zawieszony całkowicie w próżni, skoro nie ma w tekście żadnego wyjaśnienia, skąd się wzięło twierdzenie o istnieniu minimum dowolnego niepustego zbioru liczb naturalnych i inne potrzebne przesłanki. Przecież równie dobrze można było przeprowadzić dowody tych właśnie przesłanek, wychodząc z twierdzenia o indukcji zupełnej, co mogło być nawet bardziej pouczające. Natomiast paragrafu pierwszego rozdziału I (tj. pierwszych stronic tekstu) wolałbym bliżej nie omawiać, gdyż ten fragment książki nie odpowiada pod względem ścisłości i poprawności matematycznej nawet wymogom na poziomie liceum. Definicje „sigmy" i „dużego pi" są nieścisłe, bo pierwsze nie zawsze jest sumą, a drugie nie zawsze iloczynem; dowody są pozorne. Parę przedstawionych tam zręcznych chwytów rachunkowych nie uzasadnia dostatecznie włączenia tego paragrafu do książki o innym charakterze, przeznaczonej dla studentów matematyki w uniwersytetach i wyższych szkołach pedagogicznych, zawierającej partie piękne i głębokie, pomijając już to, że tematyka tego paragrafu wykracza poza szczegółowy program *Wstępu*. Poza tym właśnie rozdział I zawiera szczególnie dużo usterek redakcyjnych, błędów i niejasności w zadaniach itp. Należy żałować, że jeśli już „sigmy" itp. zna-

lazły się w podręczniku wstępu do matematyki, to nie zostały w ogóle wyzyskane do demonstrowania dowodów i definicji indukcyjnych. Tych ostatnich zresztą całkowicie autor nie uniknął (zadanie 21, str. 18, o liczbach Fibonacciego — ma być $\sqrt{5}/5$, nie zaś $\sqrt{5}/2$).

Nie wydaje się prawdopodobne, by niedoświadczony czytelnik mógł prześledzić wątek wiodący do dowodu twierdzenia Tarskiego o punkcie stałym i lematu Kuratowskiego–Zorna. Temat ten wykracza daleko poza program wstępu, ale być może zasługiwał na umieszczenie w książce z uwagi na to, że dowody zostały przeprowadzone bez pomocy liczb porządkowych i indukcji pozaskończonej. Szkoda jednak, że temat ten został aż tak pokawałkowany i rozrzucony po różnych kątach. Niektóre istotne ogniwa znalazły się nawet w tekście zadań, co już jest błędem redakcyjnym i metodycznym.

Mimo wszystkich wysuniętych tu zastrzeżeń, istotnych i mniej istotnych, które zresztą dotyczyły głównie pierwszych dwu rozdziałów i tylko niektórych dalszych fragmentów książki, uważam za rzecz dobrą, że został wydany podręcznik *Wstępu do matematyki* dla zwykłych studentów, a nie tylko i wyłącznie dla jednostek wybitnie uzdolnionych. Dopiero bowiem w oparciu o takie właśnie książki można ewentualnie prowadzić jakieś szersze studia nad skutecznością tych czy innych chwytów metodycznych, nad chłonnością przeciętnych młodocianych umysłów i ich zdolnością do samodzielnego studiowania i myślenia. Bo wydaje się niewątpliwe, że wszelka przesada w wyśrubowywaniu poziomu uczoności, piętrzenie gdzie się tylko da przeszkód, przytłaczanie nadmiarem nieprzyswajalnych informacji, pogoń za efektem i modą, snobizm abstrakcji, nie wychodzą w masowym nauczaniu na dobre sprawie krzewienia zamiłowań i umiejętności matematycznych, a wbrew zamierzeniom entuzjastów najlepszego wychodzą na najgorsze, przyczyniając się do utrwalania złych obyczajów bierności, powierzchowności, werbalizmu, które od tak dawna obserwujemy w trakcie egzaminów, zajęć seminaryjnych i innych kontaktów ze studentami, że już zaczynamy się z nimi oswajać.

Nadmierna trudność podręczników sprzyja także nasileniu tzw. odsiewu studentów pierwszego roku, o którym nie zawsze się pamięta, że jest statystyczną wypadkową wielu katastrof indywidualnych, przeżywanych gorzko przez ludzi, którzy nie zawsze musieli być całkiem nieprzydatni, choć nie od razu dawali sobie radę z pojęciem homomorfizmu kanonicznego lub iloczynu tensorowego dwu nieskończenie wymiarowych przestrzeni liniowych.

Po wyjściu książki J. Musielaka stało się oczywiste, że nawet o takich tematach, jak liczby kardynalne, można pisać poglądowo i zajmująco, co w ostatecznym rozliczeniu może być jeszcze ważniejsze niż precyzja w terminologii w wykładzie z rachunku zdań, lub sprawa pomyłek i niedopatrzeń w tekstach zadań. Dlatego, po dopracowaniu szczegółów i skorygowaniu paru zasadniczych wad koncepcyjnych, dzieło J. Musielaka mogłoby, jak sądzę, stać się rzeczywiście dobrym i pożytecznym podręcznikiem wprowadzającym w łatwy sposób do studiów matematycznych.

Adam Bielecki

Krzysztof Tatarkiewicz, *Rachunek wariacyjny*, Część II, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1970, str. 240, cena zł 37.—

Na drugi tom książki Tatarkiewicza składa się pięć rozdziałów, plus dodatek historyczno-bibliograficzny. Pierwszy rozdział zatytułowany „Rozwiązania nieciągłe" zawiera warunek kątowy Erdmana–Weierstrassa i warunki transwersalności dla problemów ze swobodnymi końcami.

Rozdział 7 (drugi — tomu drugiego) dotyczy warunku koniecznego Jacobiego i warunków wystarczających, przy czym te ostatnie autor dowodzi jedynie dla najprostszego przypadku słabego ekstremum lokalnego, tzn. lokalnego ekstremum w topologii przestrzeni C^1. W rozdziale tym autor wprowadza także pojęcie „argumentu ekstremum miejscowego". Chodzi mianowicie o rozwiązanie równania Eulera o tej własności, że dla każdego t z przedziału określoności tego rozwiązania istnieje