ISSN: 2080-5519
wm.ptm.org.pl

WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE

Tom 56 Nr 1 2020

Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II

Komitet Redakcyjny

Redaktor
Krzysztof Ciesielski
Zastępca Redaktora
Tadeusz Nadzieja
Sekretarze
Marcin Borkowski
Paweł Mleczko
Dział Recenzji
Maciej Kandulski
Roman Murawski
Krótkie informacje
Grzegorz Łysik

Piotr Biler
Aleksander Błaszczyk
Piotr Borodulin-Nadzieja
Dariusz Buraczewski
Roman Duda
Grzegorz Gabor
Grzegorz Graff
Rafał Latała
Krzysztof Pawałowski
Paweł Strzelecki
Michał Szurek
Joanna Zwierzyńska
Włodzimierz Zwonek

rok zał. 1919 ptm
POLSKIE
TOWARZYSTWO
MATEMATYCZNE

Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego zostały utworzone w 1955 roku w celu reaktywowania czasopism założonych w XIX wieku przez Samuela Dicksteina: Prac Matematyczno-Fizycznych, których 48 tomów opublikowano w latach 1888-1951, oraz Wiadomości Matematycznych wydanych w 47 tomach w okresie 1897-1939.

Początkowo Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego ukazywały się w dwóch seriach. Aktualnie wydawane są w następujących sześciu seriach:

Seria I:	Commentationes Mathematicae – od 1955 roku,
Seria II:	Wiadomości Matematyczne – od 1955 roku,
Seria III:	Matematyka Stosowana – od 1973 roku,
Seria IV:	Fundamenta Informaticae – od 1977 roku,
Seria V:	Didactica Mathematicae – od 1981 roku,
Seria VI:	Antiquitates Mathematicae – od 2007 roku.

Seria I, wydawana najpierw jako Prace Matematyczne, swoją obecną nazwę otrzymała w 1969 roku, a Seria V – poprzednio Dydaktyka Matematyki – w 2007 roku.

Sprzedaż i prenumerata

Polskie Towarzystwo Matematyczne
ul. Śniadeckich 8
00-956 Warszawa

Sales and subscription

Polish Mathematical Society
ul. Śniadeckich 8
00-956 Warszawa, Poland

Tel. +48 22 629 9592
E-mail: zgptm@ptm.org.pl

Spis treści

A. Dąbrowski, *Pułapki probabilistyki* · 1
L. Maligranda, *„B" jak przestrzeń Banacha* · 15
K. Ciesielski, *O matematycznej teorii wyborów* · 29
K. Tatarkiewicz, *Archimedes: legendy i prawda (w świetle źródeł i zdrowego rozsądku)* · 63
R. Urban, *Andriej Nikołajewicz Kołmogorow – humanista* · 89
Z. Skupień, *Maksymalne przecinanie wielu bipiramid* · 103
Rozmowa z Ianem Stewartem · 107
I. Stewart, *Dziwny wieczór* (*An Odd Evening*) · 125
K. Ciesielski, *O podstawieniu Raviego* · 129
Krótkie informacje · 143

Z żałobnej karty
Leon Mikołajczyk (1929–2016) · 151
Witold Adam Pogorzelski (1927–2018) · 155

Recenzje
Roman Duda, *Historia matematyki w Polsce na tle dziejów nauki i kultury* (rec. J. Woleński) · 161
Jerzy Ombach, *Rachunek prawdopodobieństwa wspomagany komputerowo dla studentów matematyki stosowanej* (rec. T. Szarek) · 165
Józef Banaś, Beata Rzepka, *Wykłady matematyki finansowej* (rec. P. Płuciennik) · 167

Książki nadesłane · 171
Miscellanea · 14, 28, 142, 150, 160

Contents

A. Dąbrowski, *Traps of probability theory* · 1
L. Maligranda, *"B" as Banach space* · 15
K. Ciesielski, *On mathematical theory of elections* · 29
K. Tatarkiewicz, *Archimedes – legends and truth (in light of the sources and common sense)* · 63
R. Urban, *Andrey Nikolaevich Kolmogorov, a humanist* · 89
Z. Skupień, *Intersecting most edges of many bipyramids* · 103
A conversation with Ian Stewart · 107
I. Stewart, *An Odd Evening* · 125
K. Ciesielski, *On the Ravi substitution* · 129
News and announcements · 143

Obituaries
Leon Mikołajczyk (1929–2016) · 151
Witold Adam Pogorzelski (1927–2018) · 155

Reviews
Roman Duda, *History of mathematics in Poland against the history of science and culture* (rev. J. Woleński) · 161
Jerzy Ombach, *Computer-aided probability theory for students of applied mathematics* (rev. T. Szarek) · 165
Józef Banaś, Beata Rzepka, *Lectures in financial mathematics* (rev. P. Płuciennik) · 167

Book announcements · 171
Miscellanea · 14, 28, 142, 150, 160

Wiad. Mat. 56 (1) 2020, 1–13
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Andrzej Dąbrowski (Wrocław)

Pułapki probabilistyki

Na okładce niedzielnego wydania *New York Timesa* z 21 lipca 1991 roku pojawił się artykuł relacjonujący niezwykłą dyskusję w Stanach Zjednoczonych, a nawet poza ich granicami. Jak pisze autor artykułu: „[d]ebata toczyła się na korytarzach CIA i w barakach pilotów myśliwców w Zatoce Perskiej. Analizę prowadzili matematycy w MIT i programiści komputerowi w Los Alamos National Laboratory w Nowym Meksyku. Problem był omawiany na zajęciach w więcej niż 1000 szkół w całym kraju od podstawowych do wyższych". Niezwykła dyskusja dotyczyła rozwiązania problemu Monty'ego Halla.

W klasycznej postaci problem Monty'ego Halla polega na podjęciu decyzji o maksymalnym prawdopodobieństwie wygranej w postaci samochodu. Gracz biorący w konkursie ma otworzyć jedne z trzech dostępnych drzwi. Za każdym z dwojga drzwi stoi koza, a za trzecimi – samochód, przy czym nagrody rozmieszczone są w sposób losowy. W pierwszym kroku gracz wskazuje jedne drzwi, ale ich nie otwiera. Następnie prowadzący konkurs Monty Hall otwiera inne drzwi, za którymi stoi koza. Teraz gracz może albo pozostać przy swoim pierwotnym wyborze albo wskazać pozostałe nieotwarte drzwi. Co powinien zrobić?

Problem pochodzi z turnieju telewizyjnego *Let's Make a Deal*, prowadzonego przez Monty'ego Halla w latach 1963–1977. W 1975 roku zamieszczono to zadanie w czasopiśmie *American Statistician* jako ćwiczenie z rachunku prawdopodobieństwa. Dopiero artykuł napisany przez Marilyn vos Savant[1] w 1990

[1] Amerykańska felietonistka i pisarka (ur. 1946). Zasłynęła tym, że w wieku 10 lat w teście inteligencji uzyskała wynik 228, wówczas najwyższy na świecie.

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

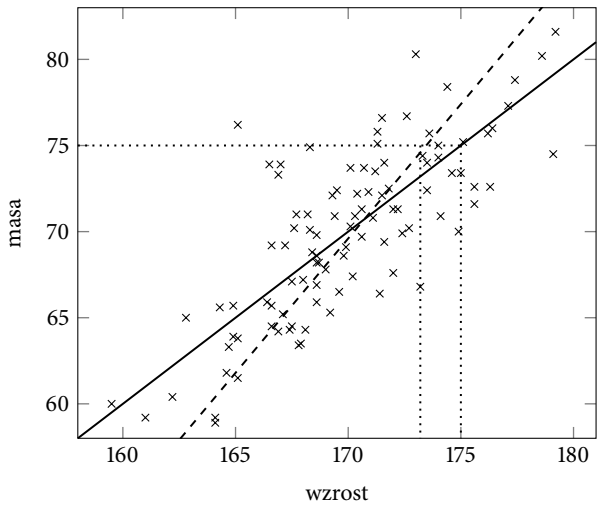
roku i opublikowany w bardzo popularnym czasopiśmie *Parade* wywołał burzę. W artykule tym vos Savant dowodziła, że prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $2/3$, gdy gracz zmieni swój pierwotny wybór. Po opublikowaniu artykułu autorka otrzymała dziesięć tysięcy listów, w większości (92%) twierdzących, że nie ma ona racji i że szanse wygrania samochodu są takie same – nieważne czy gracz pozostanie przy swoim wyborze, czy wybierze inne drzwi. Najbardziej żarliwe słowa krytyki pochodziły ze środowiska naukowego, które ubolewając nad analfabetyzmem matematycznym społeczeństwa, w 65% uważało, że nie ma ona racji. Jednak racja była po stronie Marilyn vos Savant.

Burza wywołana przez problem Monty'ego Halla dowodzi, jak łatwo zaufać intuicji, która zawodzi, gdy mamy do czynienia ze zjawiskiem losowym. Dajemy się zwieść i otumanić przez przypadek lub niepełną informację. Brak właściwego rozwiązania prowadzi do nieracjonalnych decyzji o kosztownych – nie tylko ekonomicznie – skutkach (zob. [17]).

Bertrand Russell widział paradoks tkwiący w samym sercu prawdopodobieństwa: „[j]ak można mówić o prawach przypadku? Czyż przypadek nie jest zaprzeczeniem wszelkich reguł?" Próby wprowadzenia reguł rządzących przypadkiem, zakończone zostały formalizacją stworzoną przez Kołmogorowa dopiero w latach trzydziestych XX wieku, pokazują, jakie to trudne zadanie. Artykuł przedstawia kilka ciekawych, czasami intrygujących przypadków związanymi z zastosowaniami prawdopodobieństwa i statystyki. Niektóre z nich są zawarte w ciekawej książce Tijmsa [18].

1. Nieoczekiwane skutki losowości

W *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* w 2015 roku pojawił się artykuł pod tytułem *Defining and identifying Sleeping Beauties in science*. Jako *śpiące królewny* określono artykuły naukowe, które wywołały eksplozję cytatów dopiero po wielu latach od publikacji. Wiele z przytoczonych przez autorów śpiących królewien musiało czekać na przebudzenie pięćdziesiąt lat i więcej. Jednym z rekordzistów, z czasem przebudzenia sto lat, jest artykuł brytyjskiego statystyka Ronalda Fishera, opublikowany w 1901 roku w *Philosophical Magazine* pod tytułem *On lines and planes of closest fit to system of points in space*. To, co obudziło zainteresowanie czytelników artykułu Pearsona po stu latach, odnosiło się do tezy, że przy badaniu związku między dwiema zmiennymi x i y, gdy obie są obserwowane z losowym błędem, najlepsza linia, dopasowana do par punktów (x, y) – linia minimalizująca błąd średniokwadratowy, a więc linia regresji y względem x – nie wyznacza jednoznacznie linii regresji x względem y.



1. Regresja masy względem wzrostu (linia ciągła) i wzrostu względem masy (linia przerywana)

Można posłużyć się konkretnym przykładem. W pewnej grupie osób zebrano dane o wzroście (w cm, zmienna x) i masie ciała (w kg, zmienna y). Średni wzrost i odchylenie standardowe w tej grupie wynoszą odpowiednio 170 i 4 cm. Analogiczne parametry dla masy ciała są równe 70 i 5 kg. Współczynnik korelacji tych zmiennych wynosi 0,8.

Regresja y względem x (linia ciągła na rys. 1) wyraża się wzorem $y = x - 100$. Wzór ten oznacza, że średnia masa ciała osób o wzroście x wynosi $x-100$. Wydawałoby się oczywistym, że w takim razie $x = y+100$, co oznaczałoby, że średni wzrost osób o masie y wynosi $y + 100$. Tak jednak nie jest. Regresja y względem x (linia przerywana) wyraża się wzorem $x = 0{,}64y + 125{,}2$.

Oczekiwana masa osób o wzroście 175 cm, odczytana z regresji, zilustrowanej linią ciągłą wynosi 75 kg. Oczekiwany wzrost osób o masie 75 kg wynosi 173, 2 cm (linia przerywana). Tak jest dla wszystkich wartości wzrostu i masy – osoby o masie większej od średniej mają wzrost zbliżony do średniego bardziej, niżby to wynikało z relacji masy względem wzrostu. Podobnie jest dla osób o masie mniejszej niż średnia. To zjawisko Karl Pearson, twórca metody regresji, nazwał cofaniem się (powrotem, ang. *regression*) do średniej i stąd jej nazwa.

2. Ratunek w losowości

Dużą popularnością cieszy się, podobnie jak problem Monty'ego Halla, zadanie znane jako problem wyboru narzeczonego spośród n kandydatów, z których każdy ma przypisaną jakąś inną liczbową wartość. Problem polega

na tym, że kandydatów ogląda się po kolei i zdecydować się można jedynie na wybór aktualnie oglądanego. John Gilbert i Frederick Mosteller z Uniwersytetu Harvarda znaleźli strategię gwarantującą największe prawdopodobieństwo wyboru najlepszego kandydata, w przybliżeniu równe $1/e \approx 0{,}36$, niezależnie od n dla dostatecznie dużego n. Strategia ta działa dla $n > 2$.

Jak postąpić, gdy szuka się maksimum dwóch różnych liczb, gdy odsłonięto pierwszą? Można ją wskazać jako maksimum, albo zdecydować się na drugą liczbę. Dla oczywistej strategii mieszanej (wybieram pierwszą liczbę z prawdopodobieństwem p) prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $1/2$, niezależnie od p. Strategia polegająca na decyzji o wyborze drugiej liczby w zależności od wartości pierwszej odsłoniętej wydaje się beznadziejna wobec faktu, że liczby wypisane na kartkach są dowolne. A jednak jest możliwe wskazanie strategii, w której prawdopodobieństwo sukcesu jest większe niż $1/2$. Co więcej, prawdopodobieństwo sukcesu jest tym większe, im bardziej różnią się od siebie obie liczby wypisane na kartkach. Rozwiązanie podane przez Davida Blackwella jest proste – należy wygenerować liczbę losową R według *jakiegokolwiek* rozkładu określonego na całej prostej (na przykład rozkładu normalnego standardowego). Wybiera się drugą liczbę wyłącznie wtedy, gdy pierwsza odsłonięta liczba jest mniejsza niż R.

Prawdopodobieństwo sukcesu przy wybraniu takiej strategii łatwo obliczyć. Niech X będzie pokazaną losowo (i niezależnie od R) jedną z liczb n_1, n_2, przy czym zakładamy, że $n_1 < n_2$. Sukces jest sumą dwóch wykluczających się zdarzeń $\{R < X,\ X = n_2\}$ i $\{R \geqslant X,\ X = n_1\}$. Prawdopodobieństwo sukcesu wynosi:

$$\begin{aligned} P(\text{sukces}) &= P(R < X,\ X = n_2) + P(R \geqslant X,\ X = n_1) = \\ &= P(R < X | X = n_2)P(X = n_2) + P(R \geqslant X | X = n_1)P(X = n_1) = \\ &= P(R < n_2)P(X = n_2) + P(R \geqslant n_1)P(X = n_1) = \\ &= P(R < n_2)\tfrac{1}{2} + (1 - P(R < n_1))\tfrac{1}{2} = \\ &= \frac{1 + P(n_1 \leqslant R < n_2)}{2}. \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo to, jak widać, jest większe niż $1/2$ i jest tym większe, im bardziej różnią sie od siebie liczby wypisane na kartkach.

3. Nie tylko średnia się liczy

Powszechny obyczaj operowania wartościami średnimi (oczekiwanymi) może prowadzić na manowce. Załóżmy, że w prospekcie opcji, które są propo-

nowane przez firmę maklerską, z prawdopodobieństwem $1/2$ cena akcji wzrośnie w ciągu tygodnia o 80% i z prawdopodobieństwem $1/2$ zmaleje o 60%. Makler kupuje na początku pierwszego tygodnia akcje wybranej firmy za cenę 10 000 zł i sprzedaje je po bieżącej cenie przy końcu tygodnia. Uzyskaną sumę inwestuje w całości w kolejnym tygodniu, na końcu sprzedaje i tak dalej (zob. [12]).

Wartość oczekiwana w pierwszym tygodniu wynosi $(1/2 \cdot 1{,}8 + 1/2 \cdot 0{,}4) \cdot 10\,000 = 11\,000$, więc wydaje się, że inwestycja jest opłacalna. Wartość oczekiwana po pięćdziesięciu dwóch tygodniach takich inwestycji jest równa aż 1,4 miliona złotych. Jest to jednak interes bardzo ryzykowny. Prawdopodobieństwo, że koniec roku zakończy się stratą (w kieszeni będzie mniej niż 10 000 zł) jest równe 0,95, a z prawdopodobieństwem $1/2$ pozostanie mniej niż 1 zł. Wysokie zyski są uzyskiwane z bardzo małym prawdopodobieństwem. Na przykład prawdopodobieństwo, że nasza stawka podwoi się i wyniesie po roku 20 000 zł jest równe 0,04.

W 1956 roku John Kelly z Bell Laboratories zaproponował strategię częściowego inwestowania, polegającą na tym, że w każdym tygodniu inwestuje się tylko część $f \in (0,1)$ zasobów, a resztę się pozostawia. W kolejnym tygodniu inwestuje się część f sumy zasobów z poprzedniego tygodnia i bieżącej wygranej, resztę pozostawiając. W ten sposób postępuje się przez cały czas trwania inwestycji.

Optymalna wartość f dla przedstawionej oferty wynosi $f = 5/24$. Oznacza to, że w pierwszym tygodniu wykupuje się akcje za $5/24 \cdot 10\,000 = 2083$ zł, w kieszeni zostawiając 7917 zł. Z prawdopodobieństwem $1/2$ na końcu tygodnia akcje będą warte 3749 zł, a z prawdopodobieństwem $1/2$ – 833 zł. W drugim tygodniu, w przypadku wygranej z poprzedniego tygodnia, suma do dyspozycji wynosi $3749 + 7917 = 11\,666$ zł i inwestuje się $5/24 \cdot 11\,666 = 2430$ zł, zostawiając 9236 zł. W przypadku przegranej, suma do dyspozycji wynosi $833 + 7917 = 8750$ zł i inwestuje się $5/24 \cdot 8750 = 1823$ zł, zostawiając 6927 zł. Takie postępowanie kontynuowane jest do końca roku. Skutki tej strategii są diametralnie inne, niż gdyby co tydzień inwestowano całą dostępną pulę. Praktycznie zerowe jest prawdopodobieństwo, że po roku pozostanie nam mniej niż 1 zł, a z prawdopodobieństwem 0,7 uzyskany zostanie choćby minimalny zysk. Prawdopodobieństwo, że nasza stawka podwoi się i wyniesie po roku 20 000 zł jest w tym przypadku równe 0,44.

Nic dziwnego, że takie tuzy finansowe, jak Warren Buffet, stosują tę strategię na giełdzie. Ze strategii Kelly'ego korzysta matematyk-miliarder (23 miliardów dolarów w lipcu 2020 roku), również filantrop, Jim Simons. Nawet twórca teorii informacji Claude Shannon wraz z żoną Betty i matematykiem

z MIT Edem Thorpem zgarnął fortunę w Las Vegas, umiejętnie stosując strategię Kelly'ego. Zadziwiające, że on sam nigdy nie skorzystał ze swojej strategii i nie dorobił się na operacjach finansowych. Niezwykle ciekawe fakty o życiu Shannona, Kelly'ego i innych matematyków, związanymi z matematyką finansową, można przeczytać w książce Williama Poundstone'a [13].

4. Mnożenie

Matematycznie inspirujący jest przykład o wygranych w pewnym kasynie. Krupier naciska przycisk do generowania kartki papieru z czterocyfrową liczbą całkowitą x wydrukowaną na jej odwrocie. Gracz nie widzi tej liczby, dopóki sam nie wybierze dowolnej liczby naturalnej y. Gracz otrzymuje 2,4 swojej stawki, jeśli pierwsza cyfra iloczynu xy jest równa 4, 5, 6, 7, 8, 9. Szybkie rozeznanie w swoich szansach można uzyskać, badając rozkład pierwszej cyfry w 9801-elementowej tabliczce mnożenia liczb naturalnych od 1 do 99 (zob. tab. 1). Prawdopodobieństwo wygranej kasyna w takim przypadku wynosi 0,569, co daje oczekiwany zysk kasyna $0{,}569 - (1 - 0{,}569) \cdot 1{,}4 = -0{,}034$ zł z jednej złotówki gracza. Skoro strata kasyna wynosi około 3,4% stawki, wydaje się, że warto zaryzykować. W rzeczywistości to kasyno wygrywa, uzyskując zysk co najmniej 4,3% stawki gracza. Problem wymaga więc staranniejszej analizy.

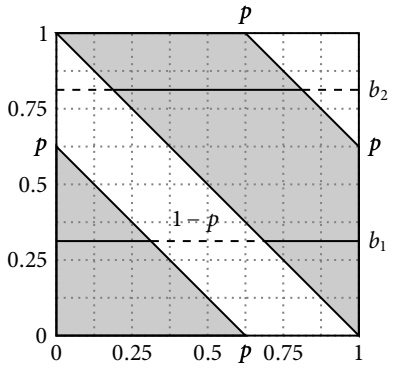
Tabela 1. Rozkład częstości cyfr w iloczynach liczb od 1 do 99

pierwsza cyfra	1	2	3	4	5	6	7	8	9
frakcja iloczynów	0,240	0,183	0,146	0,118	0,094	0,077	0,061	0,046	0,035

Zadanie można uprościć, zauważając, że pierwsze cyfry znaczące liczb t oraz $10^u t$ są takie same dla u całkowitych. Wystarczy więc ograniczyć się do liczb z przedziału $[1, 10)$ mających skończoną liczbę cyfr po przecinku. Wybieranie wszystkich liczb rzeczywistych z tego przedziału jest uogólnieniem tego zadania, łatwiejszym do analizy. Dalszym krokiem jest przejście do skali logarytmicznej. Wybór $a = \log_{10} x$ i $b = \log_{10} y$, pochodzących z przedziału $[0, 1)$ jest równoważny z wyborem x i y.

Strategie czyste w tej grze polegają na wyborze punktu (a, b) z kwadratu jednostkowego (zob. rys. 2). Strategie wygrywające dla kasyna zaznaczone są w szarym obszarze kwadratu ($p = \log_{10} 4 \approx 0{,}6021$).

Prawdopodobieństwo wygranej kasyna, gdy gracz wybiera liczbę b (na rysunku są dwie strategie czyste b_1 i b_2), a kasyno – liczbę a losowo jednostajnie z $(0, 1)$ wynosi p, niezależnie od wartości b. Podobnie, przez symetrię,



2. Dowód graficzny. Dla strategii czystych gracza b_1 i b_2, wygrana kasyna dla strategii mieszanej wynosi p. Na osi poziomej strategie kasyna, na osi pionowej strategie gracza, szary obszar to wygrane kasyna

prawdopodobieństwo wygranej kasyna, gdy kasyno wybiera liczbę a, a gracz wybiera liczbę b losowo jednostajnie z $(0,1)$ wynosi p, niezależnie od wartości a.

Prawdopodobieństwo wygranej kasyna, gdy obie strony wybierają swoje liczby a i b jednostajnie z przedziału $(0,1)$ wynosi p, natomiast wygrana kasyna $p - (1-p)\cdot 1{,}4 \approx 0{,}045$.

W pracy [10] Kent Morrison udowodnił, że ta para strategii jest optymalna. W szczególności fakt ten oznacza, że jeśli kasyno wybiera a jednostajnie, to niezależnie od strategii gracza – czystej czy mieszanej, prawdopodobieństwo wygranej kasyna jest *co najmniej* p.

Morrison wykazał ponadto, że jeżeli kasyno ogranicza swój wybór do liczb n-cyfrowych w ten sposób, że wybiera liczbę $\lfloor 10^{n-1+A} \rfloor$, przy czym A jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym z $(0,1)$, to niezależnie od strategii gracza (czystej czy mieszanej), prawdopodobieństwo wygranej kasyna jest co najmniej równe $p - 10^{1-n}$.

Jeżeli kasyno wybiera zmienną losową A z rozkładu jednostajnego na $(0,1)$ i $A = \log_{10} X$, to prawdopodobieństwo, że k (przy czym $k = 1, 2, \ldots, 9$) jest pierwszą cyfrą X wynosi:

$$P(\lfloor X \rfloor = k) = \log_{10}(1 + \tfrac{1}{k}).$$

Rozkład pierwszej cyfry zmiennej losowej z $[1,10)$ o takiej postaci nosi nazwę *rozkładu Benforda*. Frank Bedford w 1938 roku podał przykłady zbiorów danych, których pierwsze cyfry znaczące mają rozkład nazwany później jego nazwiskiem. Nazwał to prawem nietypowych (*anomalous*) liczb. Jest on sprzeczny z powszechną intuicją, że pierwsze cyfry znaczące liczb, wybranych losowo, powinny pojawiać się z takim samym prawdopodobieństwem.

W miarę, jak rosła liczba przykładów występowania rozkładu Benforda, rosła też presja, by opisać model probabilistyczny na dodatniej półprostej, dla którego rozkład pierwszych cyfr ma postać Benforda. Jedno z możliwych wyjaśnień podsuwa spostrzeżenie, że dla pomiarów fizycznych, mających rozkład Benforda, rozkład pierwszej cyfry nie zależy od użytych jednostek.

W tabeli 2 zamieszczono (za [21]) rozkład pierwszych cyfr wysokości 120 000 najwyższych miast świata, wyrażonych w metrach, stopach i kubitach (starożytnej egipskiej mierze długości liczącej 523 mm). W ostatnim rzędzie podany jest rozkład Benforda.

Tabela 2. Rozkład pierwszych cyfr wysokości 120 000 najwyższych miast świata

pierwsza cyfra	1	2	3	4	5	6	7	8	9
metry	0,298	0,174	0,126	0,092	0,076	0,071	0,060	0,054	0,050
stopy	0,299	0,186	0,122	0,100	0,074	0,062	0,059	0,053	0,046
kubity	0,308	0,162	0,135	0,089	0,078	0,062	0,064	0,055	0,046
Benford	0,301	0,176	0,125	0,097	0,079	0,067	0,058	0,051	0,046

Roger Pinkham w 1961 roku udowodnił twierdzenie, że jedynym rozkładem pierwszych cyfr, niezmienniczym względem jednostek pomiarowych jest rozkład Benforda (zob. [14]). Pierwsze cyfry liczb wybieranych losowo i niezmienniczo względem skali na dodatniej półprostej podlegają rozkładowi Benforda. Problem polega na tym, że taki rozkład nie istnieje w klasycznym modelu Kołmogorowa. W pracy [1] podano dowód tego faktu, oparty na modelu prawdopodobieństwa warunkowego Alfreda Renyiego.

5. Oddech Cezara

Nawet powszechnie znane fakty historyczne mogą być pretekstem do zaskakujących pytań probabilistycznych i jeszcze ciekawszych odpowiedzi. W książce Johna Paulosa [11] (zob. też [8]) opisany jest problem ostatniego oddechu Cezara: „Juliusz Cezar wykrztusił: «I ty, Brutusie, przeciwko mnie?». Pytamy: jakie jest prawdopodobieństwo, że właśnie w tej chwili wchłonęliśmy jedną spośród cząsteczek, które Cezar wyzionął w swym ostatnim tchnieniu?"

W ziemskiej atmosferze jest $N = 1{,}37 \cdot 10^{44}$ cząsteczek. Ostatni intensywny wydech Cezara mógł zawierać litr powietrza, czyli $A = 2{,}69 \cdot 10^{22}$ cząsteczek. Prawdopodobieństwo, że jedna cząsteczka wdechu w chwili obecnej nie pochodzi z wydechu Cezara jest równe $1 - \frac{A}{N}$. Jeżeli teraz wchłonięto B cząsteczek, to prawdopodobieństwo, że żadna z nich nie pochodzi od Cezara wynosi $(1 - \frac{A}{N})^B$.

Prawdopodobieństwo, że przynajmniej jedna z wchłoniętych wyszła z ust Cezara jest zatem równe $1-(1-\frac{A}{N})^B$. Tę wielkość można łatwo obliczyć:

$$1-(1-\tfrac{A}{N})^B = 1-\left((1-\tfrac{A}{N})^N\right)^{\frac{B}{N}} \approx 1-e^{-\frac{AB}{N}}.$$

Gdy zatem dokonamy zwykłego, półlitrowego wdechu, to $B=\frac{1}{2}A$, a gdy pełnego, to $B=A$. Zważywszy, że

$$\frac{A^2}{N} = \frac{2{,}69^2\cdot 10^{44}}{1{,}37\cdot 10^{44}} = 5{,}28,$$

to prawdopodobieństwo, że właśnie w tej chwili konkretna osoba wchłonęła jedną z „cząsteczek Cezara", waha się między $1-e^{-2{,}64}\approx 0{,}93$ a $1-e^{-5{,}28}\approx 0{,}99$, w zależności czy oddech był spokojny, czy głęboki.

6. Fotony

Rachunek prawdopodobieństwa pozwala na porównanie długości podróży fotonu od środka Słońca do jego korony i od korony Słońca na Ziemię. Łatwo obliczyć, bez udziału rachunku prawdopodobieństwa, że foton wędruje od korony na Ziemię około ośmiu minut (odległość $1{,}5\cdot 10^8$ km z prędkością światła). Promień Słońca, o długości $7\cdot 10^5$ km, jest dwieście razy krótszy. Okazuje się, że foton ze środka do korony Słońca wędruje około 6000 lat!

W szacunkach przyjęto, że foton, odbijając się od innych cząstek, odbywa na swojej drodze trójwymiarowy spacer losowy. Zgodnie z rachunkiem prawdopodobieństwa, po n odbiciach cząsteczka osiągnie odległość średnio $\sqrt{8n/3\pi}$ jednostkowych skoków. Średni dystans w czasie między zderzeniami wynosi centymetr, czyli 10^{-5} km. Oczekiwana liczba odbić do osiągnięcia korony Słońca spełnia równanie

$$\sqrt{\frac{8n}{3\pi}}\cdot 10^{-5} = 7\cdot 10^5,$$

a więc

$$n = \frac{3\pi(7\cdot 10^{10})^2}{8} = 5{,}77\cdot 10^{21}.$$

Czas na pokonanie jednego odbicia (w sekundach) jest równy

$$\frac{10^{-5}}{300\,000} = 3{,}33\cdot 10^{-11}.$$

Oczekiwany czas na dotarcie do korony (w sekundach) wynosi

$$5{,}77\cdot 10^{21}\cdot 3{,}33\cdot 10^{-11} = 1{,}92\cdot 10^{11}$$

co oznacza, że po 6100 latach (średnio w roku jest około $365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600 \approx 3{,}16 \cdot 10^7$ sekund) cząsteczka dotrze z centrum Słońca do jego korony.

Oszacowanie nie uwzględnia niejednorodności materii słonecznej. Czas przejścia fotonu ze środka Słońca do korony szacowany jest na od dziesięciu do stu siedemdziesięciu tysięcy lat (za [22]).

7. Motyle na Malajach

Metod statystycznych używa się do oszacowania nieznanej całkowitej liczby obiektów występujących w pewnym zbiorze. Dwa przykłady są powszechnie znane. Pierwszym z nich jest metoda CMR wielokrotnych złowień (ang. *Capture – Mark – Recapture*), polegająca na wylosowaniu pewnej liczby osobników, oznakowaniu ich, a następnie przy drugiej serii wylosowanych osobników, oszacowanie całkowitej liczby na podstawie proporcji oznakowanych i nieoznakowanych osobników.

Drugim przykładem jest metoda używana przez wywiad aliancki do oszacowania wielkości produkcji czołgów czy rakiet V2 na podstawie ich numerów seryjnych. Metody te przewyższały dokładnością informacje uzyskane klasycznymi metodami wywiadu (zob. [24]). Mniej znany jest przykład szacowania nieznanej liczby, związany z odkryciami przyrodniczymi na Malajach.

Na początku lat czterdziestych przyrodnik brytyjski Aleksander Corbet spędził dwa lata na łapaniu motyli na Malajach (dziś Malezja). Kiedy wrócił do Wielkiej Brytanii, zwrócił się do statystyka Ronalda Fishera z pytaniem, ile nowych gatunków motyli może odkryć w czasie kolejnej dwuletniej wyprawy na Malaje, a ile w ciągu rocznej wyprawy. Jedyną dostępną Fisherowi informacją była tabela 3, opisująca statystykę liczności różnych gatunków motyli, złapanych przez Corbeta.

Tabela 3. Częstość występowania różnych liczb gatunków motyli odkrytych w ciągu dwuletniej wyprawy Corbeta

n_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
g_i	118	74	44	24	29	22	20	19	20	15	12	14	6	12	6

W tabeli g_i oznacza liczbę gatunków, n_i – liczbę osobników danego gatunku. Dane umieszczone w tabeli oznaczają, na przykład, że 118 gatunków motyli było reprezentowanych przez jednego motyla, 74 gatunki przez dwa motyle, 44 przez trzy motyle itd.

Aby przybliżyć problem, przed jakim stanął Fisher, można posłużyć się prostym przykładem. Uczeni odkryli manuskrypt z dwudziestodwuliterowym napisem w nieznanym języku: „Stoi na stacji lokomotywa". Zastanawiają się, ile nowych liter może pojawić się w kolejnym znalezionym napisie o takiej samej długości.

Odpowiedź Fishera na pytanie Corbeta (zob. [5]) oparta została na modelu statystycznym, zbudowanym i przetestowanym na różnych danych biologicznych. Estymator Fishera ma bardzo prostą postać:

$$g = \sum_i (-1)^{i+1} g_i.$$

Odpowiedź Fishera na pytanie Corbeta brzmiała – oczekiwana liczba nowych gatunków odkrytych w czasie kolejnego dwuletniego sezonu na Malajach wyniesie siedemdziesiąt pięć. Na pytanie Corbeta, ile można oczekiwać motyli w czasie jednorocznej wyprawy, Fisher nie znalazł odpowiedzi.

Tabela 4. Częstość występowania odkrytych liter dla napisu w nieznanym języku

n_i	1	2	3	4
g_i	8	2	2	1

Estymator Fishera przewiduje $8 - 2 + 2 - 1 = 7$ nowych liter w napisie w nieznanym języku (zob. tab. 4). Gdyby następnym, odkrytym fragmentem o dwudziestu dwóch literach było „Ciężka, ogromna i pot z niej...", w którym jest 8 nowych liter: „ę", „ż", „g", „r", „z", „e", „j", to estymator Fishera całkiem nieźle by się sprawdził.

Problem liczby nieznanych gatunków był tematem wielu prac, dotyczących sytuacji, gdy należy oszacować liczbę nowych gatunków w próbce o mniejszej liczbie elementów niż dana (zbudowanie dobrego estymatora, gdy nowa próbka jest liczniejsza, jest trudne).

Statystycy I. J. Good i G. H. Toulmin zaproponowali w pracy [6] estymator liczby nowych gatunków na podstawie n-elementowej próby, gdy nowa próba zawiera tn elementów i $t \leqslant 1$

$$g = -\sum_i (-t)^i g_i.$$

Estymator ten ma błąd średniokwadratowy ograniczony z góry przez nt^2. Na pytanie Corbeta można wreszcie odpowiedzieć – w czasie rocznej wyprawy

oczekuje się odkrycia

$$118(\tfrac{1}{2}) - 74(\tfrac{1}{2})^2 + 44(\tfrac{1}{2})^3 - 24(\tfrac{1}{2})^4 + \cdots + 6(\tfrac{1}{2})^{15} \approx 45$$

nowych gatunków.

W Bodleian Library w Oxfordzie odkryto w 1985 roku liczący czterysta trzydzieści słów poemat nieznanego autora. Czas powstania utworu mógłby wskazywać, że jego autorem jest William Szekspir. Statystycy Bradley Efron i Ronald Thisted zauważyli, że słowa można traktować jak „gatunki motyli", a zestaw znanych utworów Szekspira jako obserwowaną próbę i oszacować liczbę nowych słów w utworze, przy założeniu, że jego autorem jest Szekspir. Estymator Gooda i Toulmina został uzupełniony przez nich o dodatkowe testy zgodności i bardziej precyzyjne oszacowania (zob. [4]).

Według ich szacunków w nowym poemacie powinno się znaleźć między cztery a dziesięć słów nie występujących w dotychczasowych utworach poety, między dwa i siedem występujących jednokrotnie, a między jeden a pięć – dwukrotnie. W nowym poemacie dziewięć słów było nowych, siedem było jednokrotnie występujących u Szekspira, a pięć – dwukrotnie. Na podstawie testów statystycznych Efron i Thisted nie wykluczyli autorstwa Szekspira, co skomentowali zdaniem: „[n]ieznany poemat tak dobrze pasuje do Szekspira, jak inne utwory Szekspira pasują do utworów Szekspira".

Dzięki estymatorom podanym w artykule [3] przez Efrona, który rozszerzył wyniki Gooda i Toulmina na przypadek $t > 1$ udało się dodatkowo oszacować, że Szekspir mógł znać dwukrotnie więcej słów w porównaniu z tymi, których użył w znanych utworach.

Persi Diakonis, statystyk pracujący w Stanford, po zapoznaniu się z pracami Efrona i Thisteda oświadczył, że zmienił opinię o odkrytym poemacie. „Kiedy wcześniej czytałem ten poemat, nic w nim nie przypominało Szekspira. [...] Ale teraz, gdy zobaczyłem analizy Brada i Rona, wydaje mi się całkiem prawdopodobne, że to on go napisał". Historię tę barwnie opisała Gina Kolata w artykule *Nowy poemat Szekspira: „Oda do statystyki"*, który ukazał się w czasopiśmie *Science* w 1986 roku (zob. [9]).

Bibliografia

[1] A. Dąbrowski, *Osiem i pół*, Matematyka – Społeczeństwo – Nauczanie 21 (1998), 9–14.

[2] A. Dąbrowski, *Osiem i pół+*, Matematyka – Społeczeństwo – Nauczanie 22 (1999), 35–37.

[3] B. Efron, R. Thisted, *Estimating the number of unseen species – how many words did Shakespeare know?*, Biometrika 63 (1976), nr 3, 435–447.
[4] B. Efron, R. Thisted, *Did Shakespeare write a newly-discovered poem?*, Biometrika 74 (1987), nr 3, 445–455.
[5] R. A. Fisher, A. S. Corbet, C. B. Williams, *The relation between the number of species and the number of individuals in a random sample of an animal population*, Journal of Animal Ecology 12 (1943), nr 1, 42–58.
[6] I. J. Good, G. H. Toulmin, *The number of new species, and the increase in population coverage, when a sample is increased*, Biometrika 43 (1956), 45–63.
[7] T. Hill, *Knowing when to stop*, American Scientist 97 (2009), 126–133.
[8] S. Kean, *Ostatni oddech Cezara*, Feeria Science, Łódź 2017.
[9] G. Kolata, *Shakespeare's new poem: an ode to statistics*, Science 231 (1986), nr 4736, 335–336.
[10] K. E. Morrison, *The multiplication game*, Mathematics Magazine 83 (2010), nr 2, 100–110.
[11] J. A. Paulos, *Analfabetyzm matematyczny i jego skutki*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1999.
[12] J. A. Paulos, *Matematyk gra na giełdzie*, CeDeWu, Warszawa 2003.
[13] W. Poundstone, *Fortune's formula. The untold story of the scientific betting system that beat the casinos and Wall Street*, Hill and Wang 2006.
[14] R. S. Pinkham, *On the distribution of first significant digits*, Ann. Math. Statist. 32 (1961), nr 4, 1223–1230.
[15] J. Rosenhouse, *The Monty Hall Problem. The remarkable story of math's most contentious brain teaser*, Oxford University Press, Oxford 2009.
[16] N. D. Singpurwalla, *"Sleeping beauties" in statistics*, Significance 17 (2020), 48–48.
[17] N. N. Taleb, *Zwiedzeni przez losowość. Tajemnicza rola przypadku w życiu i w rynkowej grze*, Kurhaus Publishing, Warszawa 2016.
[18] H. C. Tijms, *Surprises in probability, seventeen short stories*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton 2019.
[19] https://mathworld.wolfram.com/BenfordsLaw.html (dostęp: 7.08.2020).
[20] https://www.johndcook.com/blog/benfords-law/ (dostęp: 7.08.2020).
[21] http://econ.ucsb.edu/~doug/240a/Benford%20Law.html (dostęp: 7.08.2020)
[22] http://www.astronoo.com/en/articles/journey-of-the-photon.html (dostęp: 7.08.2020)
[23] https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_wielokrotnych_z%C5%82owie%C5%84 (dostęp: 7.08.2020)
[24] https://en.wikipedia.org/wiki/German_tank_problem (dostęp: 7.08.2020).

Andrzej Dąbrowski
Uniwersytet Wrocławski
Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu
aludwikdabr@gmail.com



Tablica reklamowa informująca o nowym osiedlu w Krakowie (fot. Barbara Pałka)

Wiad. Mat. 56 (1) 2020, 15–27
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Lech Maligranda (Luleå, Poznań)

„B" jak przestrzeń Banacha

1. Wstęp

W związku ze stuleciem pracy doktorskiej Stefana Banacha, przyjętej do oceny 24 czerwca 1920 roku na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie i opublikowanej w 1922 roku w *Fundamenta Mathematicae*, w artykule omówiona zostanie sprawa wprowadzenia nazwy „B-przestrzeń" i „przestrzeń Banacha". Niniejszy artykuł został podzielony na cztery części: klasyczne przestrzenie unormowane i przestrzenie metryczne przed 1920 rokiem, przestrzenie liniowe unormowane i zupełne, B-przestrzenie i przestrzenie Banacha, a na koniec wspomniane są także przestrzenie quasi-Banacha.

2. Klasyczne przestrzenie unormowane i przestrzenie metryczne przed 1920 rokiem

Pod koniec XIX wieku zaczęto rozważać zbiory złożone z funkcji i wyposażone w naturalne struktury, a na początku XX wieku idea zupełnej przestrzeni unormowanej przewijała się wielokrotnie w pracach różnych matematyków, jak na przykład Erika Ivara Fredholma w pracach z lat 1900–1903, Davida Hilberta w sześciu pracach z lat 1904–1910 i Frigyesa Riesza w licznych pracach od 1907 roku. Badając równania różniczkowe i całkowe, stykali się oni z konkretnymi przestrzeniami funkcyjnymi, choć nie definiowali ich wyraźnie.

W 1903 roku Jacques Hadamard (zob. [27]), jako pierwszy, rozważał przestrzeń $C[a, b]$ wszystkich ciągłych funkcji rzeczywistych na domkniętym przedziale $[a, b]$ z topologią zbieżności jednostajnej, ponieważ był zainteresowany

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

reprezentacją na niej ciągłych funkcjonałów liniowych. Reprezentację taką podali niezależnie Maurice Fréchet (zob. [23]) i Frigyes Riesz (zob. [47]) w 1907 roku. Oczywiście zbiór funkcji ciągłych występował i był badany znacznie wcześniej, zwłaszcza w pracach Ascoliego, Weierstrassa i Arzeli.

Przestrzeń $L^2[a,b]$ pojawiła się w pracach Ernsta Fischera [21] i Riesza [46], w których niezależnie udowodniają oni, że przestrzeń ta jest zupełną przestrzenią metryczną. Obecnie fakt ten jest znany jako twierdzenie Riesza–Fischera. Nazwy „przestrzeń Hilberta" po raz pierwszy użył Riesz w 1913 roku w swojej książce [49].

Miara i całka Lebesgue'a pojawiły się około 1900 roku. Używając języka dzisiejszej matematyki, powiedzielibyśmy, że pojawiła się przestrzeń $L^1[a,b]$. W 1910 roku Riesz w pracy [48] zdefiniował oraz zbadał przestrzenie $L^p[a,b]$ z wykładnikiem $p \in (1,\infty)$, używając litery „L" na cześć Lebesgue'a. Przestrzeń $L^p[a,b]$ to klasy wszystkich funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a na $[a,b]$, dla których norma

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

jest skończona, przy czym utożsamia się funkcje równe prawie wszędzie na przedziale $[a,b]$. Riesz rozważał również n-wymiarowe przestrzenie l_n^p oraz nieskończenie wymiarowe przestrzenie ciągowe l^p zdefiniowane w 1913 roku dla $p \in [1,\infty)$ jako (zob. [49]):

$$l^p = \left\{x = (x_n)\colon \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} < \infty\right\}.$$

W książce [49], Riesz zdefiniował też przestrzeń l^∞ jako

$$l^\infty = \left\{x = (x_n)\colon \|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty\right\}.$$

Riesz udowodnił, że $L^p[a,b]$ są przestrzeniami unormowanymi i zupełnymi z dualną $(L^p[a,b])^*$, tzn. przestrzenią wszystkich ograniczonych liniowych funkcjonałów na $L^p[a,b]$, którą można identyfikować z przestrzenią $L^{p'}[a,b]$, przy czym p' jest wykładnikiem sprzężonym do p, tzn. $1/p+1/p' = 1$. Przestrzeń $L^\infty[0,1]$ z normą

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[0,1]} |f(x)| = \inf\left\{\alpha > 0\colon m\left(\{x \in [0,1] : |f(x)| > \alpha\}\right) = 0\right\}$$

pojawiła się dopiero w pracy Hugona Steinhausa [53] z 1919 roku, jako przestrzeń dualna do $L^1[0,1]$. Odnotujmy, że przestrzenie L^p powszechnie nazywane są w literaturze przestrzeniami Lebesgue'a, a nie przestrzeniami Riesza.

Przypomnijmy, że jedną z pierwszych publikacji, w której rozważano abstrakcyjne przestrzenie zawierające funkcje oraz pojęcie metryki (choć pod inną nazwą) była praca Frécheta [22] z 1906 roku. Przestrzenie metryczne spopularyzował Felix Hausdorff w książce [29] z 1914 roku – pojęcie metryki zostało wprowadzone na str. 211 jako aksjomatycznie określona odległość $d(x, y)$ między punktami x, y tej przestrzeni. Tam też znajdujemy pojęcia zbieżności ciągu oraz zupełności przestrzeni metrycznej. Natomiast F-przestrzenie (przestrzenie Frécheta) zostały wprowadzone przez Frécheta w [25] w 1926 roku. Fréchet [23] był jednym z pierwszych, który używał określenie „przestrzeń", a Erhard Schmidt (ten od ortogonalizacji Grama–Schmidta) w 1907 roku wprowadził termin „przestrzenie funkcyjne".

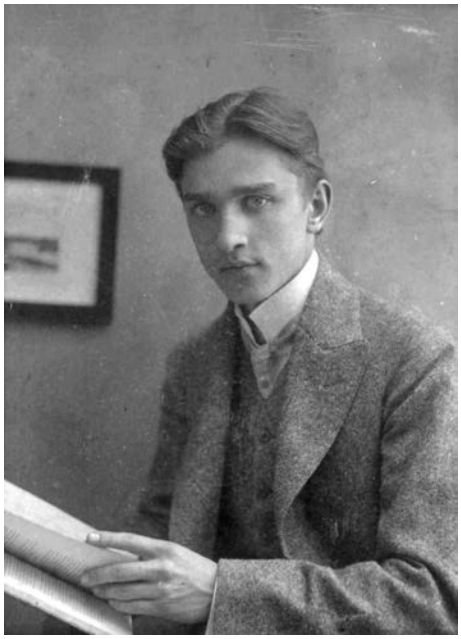
Koncepcja zupełnej unormowanej przestrzeni liniowej była gotowa do odkrycia około 1913 roku, gdyż do tego roku odkryte zostały klasyczne przestrzenie (chronologicznie): $C[a, b]$, l^2, $L^2[a, b]$, $L^p[a, b]$ i l^p dla $p \in [1, \infty)$ oraz l^∞ (zob. [45, str. 23]). To też wyjaśnia, dlaczego wielu matematyków prawie jednocześnie wpadło na te same pomysły.

3. Przestrzenie liniowe unormowane i zupełne

Przestrzeń liniową (wektorową) wprowadził Giuseppe Peano w książce [44] w 1888 roku i to w formie obecnie używanej (zob. [15, str. 39; 42, str. 114–121]). Jego koncepcja została jednak zapomniana i Hermann Weyl (zob. [56, str. 15–16]) na nowo odkrył ją trzydzieści lat później (zob. [45, str. 5]).

Wiadomo, że pojęcie normy pojawiło się przed Banachem, o czym pisze na przykład Albrecht Pietsch (zob. [45, str. 14–24]). W pracy Alberta A. Bennetta [11] z 1916 roku omawiane są zupełne unormowane grupy abelowe i metoda rozwiązywania równań operatorowych nazywana metodą Newtona (opisana jest ona w książce [45, str. 16]). Natomiast w artykule Kennetha W. Lamsona [36] z 1920 roku mamy na przestrzeni liniowej normę zupełną i twierdzenie o funkcji uwikłanej (praca ta to złożony w grudniu 1917 roku doktorat na Uniwersytecie w Chicago, którego promotorem był Gilbert A. Bliss). Termin „norma" (dla normy maksimum) pojawił się również w 1918 roku w pracy Riesza [50, str. 72].

W latach 1921–1922 Norbert Wiener wprowadził w pracach [57–59] aksjomaty normy na przestrzeni liniowej, ale nie rozważał zupełności. Aksjomat jednorodności w artykułach [57, własność (6), str. 313; 58, własność (6), str. 123] wygląda na literówkę, ale niestety jest też powtórzony w pracy [59, własność (7), str. 332]. Mamy tam $\|\lambda x\| = \lambda\|x\|$ i dla $\lambda < 0$ nie jest wtedy prawdą, że $\|\cdot\| \geqslant 0$ (zob. też [12, str. 68; 17, str. 38]). Wspomnieć również należy o normach (bez zupełności) na przestrzeniach ciągowych wprowadzonych przez Eduarda



1. 27-letni Stefan Banach (Kraków, 1919). Zdjęcie z okładki ksiażki [31]

Helly'ego [30] w 1921 roku oraz o rezultatach Hansa Hahna [28], badającego w 1922 roku ich dualność. Dokładny opis badań Wienera, Helly'ego i Hahna znajdujemy w pracach [12, str. 67–72; 16, str. 28 i 32; 17, str. 38–40].

Pojęcie przestrzeni liniowej, unormowanej i zupełnej (bez specjalnej nazwy) pojawiło się w 1920 roku w pracy doktorskiej Stefana Banacha *O operacjach na zbiorach abstrakcyjnych i ich zastosowaniach do równań całkowych*, która została złożona 24 czerwca 1920 roku na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie i przyjęta do dalszej procedury. Jego definicje były dopracowane i są używane do teraz, a przestrzenie L^p, l^p i $C[a,b]$ oraz rezultaty o nich były ważne dla Banacha jako przykłady.

Niech X będzie przestrzenią liniową (rzeczywistą lub zespoloną). Funkcja $\|\cdot\|: X \to [0,\infty)$ spełniająca następujące warunki:

1° $\|x\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$,

2° $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ dla każdego $x \in X$ i każdego $\lambda \in \mathbb{R}$ (lub $\lambda \in \mathbb{C}$) (*jednorodność*),

3° $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ dla dowolnych $x, y \in X$ (*nierówność trójkąta*),

nazywa się *normą*, a przestrzeń liniowa X wraz z normą $\|\cdot\|$ nazywa się *przestrzenią unormowaną*. U Banacha była to tylko rzeczywista przestrzeń liniowa.

Gdy dodatkowo przestrzeń unormowana jest *zupełna*, co oznacza, że jeżeli mamy dowolny ciąg Cauchy'ego $\{x_n\}$ elementów X, tzn. $\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n\| = 0$, to istnieje taki $x \in X$, że $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$, taka przestrzeń $(X, \|\cdot\|)$ jest obecnie nazywana *przestrzenią Banacha*.

W recenzji doktoratu Banacha z 30 października 1920 roku, pisanej ręcznie przez Eustachego Żylińskiego i podpisanej przez Hugona Steinhausa, czytamy:

> Wobec oryginalności metod, ważności wyników oraz pięknej i bardzo współczesnej budowy, rozprawa p. Banacha nietylko spełnia znakomicie warunki przyjęte dla pracy doktorskiej, lecz mogłaby służyć nawet za podstawę do habilitacji w najpoważniejszych Uniwersytetach.

Egzamin doktorski z matematyki i fizyki zdał Banach celująco 3 listopada 1920 roku przed Komisją, którą stanowili: matematycy Eustachy Żyliński i Hugo Steinhaus, fizyk Stanisław Loria oraz mineralog i krystalograf, dziekan Zygmunt Weyberg. Egzamin z filozofii zdał zaś 11 grudnia 1920 roku. Promocja doktorska Banacha odbyła się 22 stycznia 1921 roku. Promotorem na dyplomie (formalnym) był filozof i logik Kazimierz Twardowski, gdyż był on profesorem zwyczajnym.

Nic mi nie wiadomo o tym, by zachował się oryginał pracy doktorskiej Banacha, pisany z pewnością w języku polskim. Jednak została ona opublikowana po francusku w 1922 roku jako artykuł [1] w trzecim numerze *Fundamenta Mathematicae* i przedrukowana w książce [8, str. 305–348], gdyż była jego kluczową publikacją.

Banach w pracy [1], oprócz definicji przestrzeni unormowanej zupełnej, udowodnił również ważne twierdzenia o operatorach liniowych, w tym twierdzenia, że granica punktowo zbieżnego ciągu operatorów liniowych ciągłych jest operatorem liniowym ciągłym oraz twierdzenie o punkcie stałym dla przekształceń ściągających (kontrakcji). Udowodnił ponadto, że przestrzeń unormowana jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy szereg absolutnie zbieżny jest zbieżny. Zawartość pracy Banacha [1] została dokładnie opisana w pracach [12, str. 73–78; 16, str. 30–31; 32] oraz w książkach [18, str. 98–101; 19, str. 273–275].

Warto też wspomnieć, że Banach wśród swoich przykładów podawał ponadto przestrzenie dziś nazywane jednowymiarowymi przestrzeniami Sobolewa, które oznaczał przez $C^n L^p$ i rozważał jako zbiór funkcji, których pochodna rzędu $(n-1)$ jest absolutnie ciągła i pochodna rzędu n jest p-całkowalna z normą $\|f\| = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| + (\int_a^b |f^{(n)}(x)|^p \,\mathrm{d}x)^{1/p}$ (zob. [1, str. 134 i 167; 45, str. 442]). W jednowymiarowym przypadku słabe pochodne (uogólnione pochodne) i przestrzenie Sobolewa można definiować przez twierdzenie Nikodyma [43], wiążące funkcje absolutnie ciągłe na $[a, b]$ z pochodnymi dystrybucyjnymi (uogólnionymi) – zob. [35, str. 273–276; 41, str. 4–6].

Podsumowaniem wczesnych prób zbudowania analizy na przestrzeniach funkcyjnych jest książka Paula Lévy'ego [37], od której zaczęto ją nazywać analizą funkcjonalną.

4. B-przestrzenie i przestrzenie Banacha

Omówimy teraz sprawę nazw „B-przestrzeń" i „przestrzeń Banacha", co jest głównym tematem tej pracy. Zarówno w pracy doktorskiej Banacha z 1920 roku, jak i w jego pracy [1] opublikowanej w 1922 roku, znajdujemy określenie „przestrzenie liniowe, unormowane i zupełne", ale nie mają one u niego jednej wspólnej nazwy.

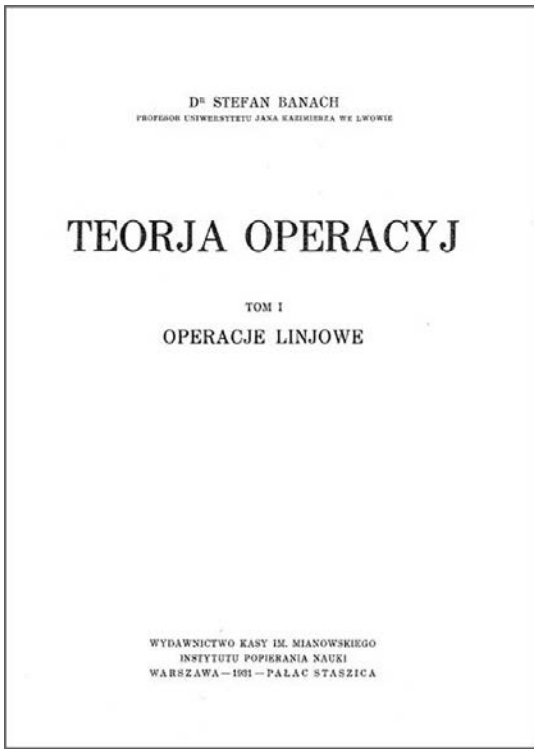
Termin „przestrzeń typu (B)" wprowadził Steinhaus w 1929 roku w pracy [54, str. 54]. U Banacha termin „przestrzeń typu (B)" pojawia się dopiero w jego książkach (polskiej [3] z 1931 roku i francuskiej [5] z 1932 roku), a w artykułach opublikowanych w czasopismach dopiero w 1931 roku w pracy [4, str. 101] oraz w 1933 roku w artykule ze Stanisławem Mazurem [9, str. 90].

Termin *przestrzeń Banacha* wprowadził Fréchet w artykule [25, str. 25–27 i 38] oraz w książce o przestrzeniach metrycznych [26, str. 141]. Z kolei w pracy [24] Fréchet porównał aksjomaty Banacha i Wienera. Aksjomat jednorodności Wienera zapisał w postaci dodatniej jednorodności (zob. [24, str. 54]). Banach „odwdzięczył się" Fréchetowi, wprowadzając w książce termin „przestrzeń typu (F)" dla przestrzeni Frécheta.

Warto przypomnieć, że przestrzenie w początkowym okresie nazywane były przestrzeniami *Banacha–Wienera*, ale po opublikowanych wyjaśnieniach Wienera, w których oddał pierwszeństwo Banachowi, wkrótce stały się *przestrzeniami Banacha*. Otóż Wiener w przypisie swojej pracy [60, str. 143] (zob. też [45, str. 20]) napisał:

> Jako końcowy komentarz do tej pracy chciałem stwierdzić, że aksjomaty, nie całkowicie takie jak u Banacha, podawałem przy wielu okazjach (...). Jednak ponieważ moje prace pochodzą z okresu sierpnia i września 1920, a praca Banacha była już przedstawiona w jego doktoracie złożonym w czerwcu 1920 roku, jemu należy przypisać pierwszeństwo.

Odnotujmy jeszcze, że w pracach Wienera [57–59] warunek jednorodności 2° nie jest poprawny, co zostało wspomniane wyżej. Pozostało więc określenie *przestrzenie Banacha* i nazwa ta, mająca historyczne uzasadnienie, szybko się przyjęła i jest powszechnie używana. Jednak Wiener w artykule [60, str. 138] zauważył, że warunek jednorodności 2° u Banacha zachodzi również w przypadku



2. Okładka książki Stefana Banacha [3]

zespolonym (mamy wtedy zespoloną przestrzeń liniową unormowaną), czego nie ma w pracy Banacha.

Po wersji francuskiej książki Banacha [5] z 1932 roku, gdzie znajdujemy trzy fundamentalne twierdzenia analizy funkcjonalnej: twierdzenie Hahna–Banacha [2] (w 1929 roku tylko wersję rzeczywistą – wersja zespolona udowodniona została dopiero w 1938 roku w pracach [14, 55]), twierdzenie Banacha–Steinhausa o jednostajnej ograniczoności w artykule [10] i twierdzenie Banacha o odwzorowaniu otwartym w książce [5, str. 38–40] z dowodem Schaudera w pracy [52] (nazywane też twierdzeniem Banacha–Schaudera) możemy stwierdzić, że istotnie był to początek (rzeczywistej) analizy funkcjonalnej.

Stefan Banach, który jest ojcem zupełnych przestrzeni unormowanych, zwanych obecnie przestrzeniami Banacha, udowodnił też – oprócz powyższych trzech podstawowych – wiele fundamentalnych twierdzeń. Wymieńmy więc jeszcze twierdzenie o domkniętym wykresie (zob. [5, str. 41]) i twierdzenie Banacha–Steinhausa „o zagęszczaniu osobliwości" (zob. [10]).

Banach uzyskał rezultaty dotyczące przestrzeni dualnych (sprzężonych) i operatorów sprzężonych (on też wprowadził te pojęcia). W obu książkach

Banacha [3, 5] znajdujemy następujące nazewnictwo na rozpatrywane przestrzenie – przestrzeń typu (G) to grupa topologiczna, przestrzeń typu (D) to przestrzeń metryczna, przestrzeń typu (F) to F-przestrzeń i przestrzeń typu (B) to B-przestrzeń czyli zupełna przestrzeń unormowana. Ważną część tych monografii Banacha stanowią *Uwagi* (dziewięć stron) w książce [3] i *Remarques* (piętnaście stron) w książce [5], przy redagowaniu których duży udział miał Mazur (Banach dziękuje mu za to w przedmowie, zarówno do wersji polskiej [3], jak i francuskiej [5]). Zawierają one komentarze historyczne, uwagi o związkach z innymi pojęciami i twierdzeniami, problemy otwarte oraz zarys dalszych kierunków badań. Zawartość monografii Banacha omawiana jest historycznie w pracy [13, str. 314–315] i w książce [18, str. 125–132].

Monografia Banacha [5], będąca syntezą dorobku pierwszego dziesięciolecia badań lwowskiej szkoły matematycznej w zakresie analizy funkcjonalnej, szybko zyskała uznanie i przyniosła sławę jej autorowi. Książka ta jest trwałym pomnikiem polskiego wkładu do analizy funkcjonalnej. Była ona znaczącą i podstawową monografią, źródłem cytatów do 1958 roku, kiedy to zastąpiła ją monografia Dunforda i Schwartza [20].

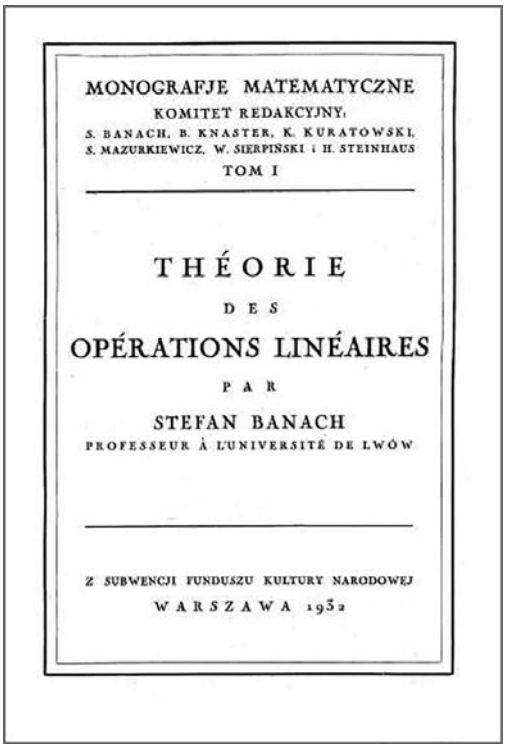
Wyrazem wielkiego znaczenia rezultatów Banacha było zaproszenie go do wygłoszenia plenarnego wykładu na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Oslo w lipcu 1936 roku (14–18 lipca 1936). Banach wygłosił 18 lipca 1936 roku trwający czterdzieści pięć minut odczyt plenarny *Teoria operacji i jej znaczenie w analizie*, opublikowany po niemiecku jako artykuł [6].

Reasumując, możemy stwierdzić, że praca Banacha z 1922 roku była prapoczątkiem analizy funkcjonalnej, natomiast książka Banacha z 1932 roku z trzema fundamentalnymi twierdzeniami stanowi początek liniowej analizy funkcjonalnej.

Historię przestrzeni Banacha i operatorów między nimi opisuje dokładnie Pietsch w książce [45].

Banacha i jego uczniów we Lwowie interesowała też nieliniowa analiza funkcjonalna. W związku z tym miała się ukazać jego książka na ten temat (zob. zdjęcie 4). W istocie, od 1935 roku na okładkach Monografii Matematycznych pojawiało się zawiadomienie o przygotowywanej książce Stefana Banacha *Théorie générale des opérations*. Anons był powtarzany na okładkach Monografii Matematycznych, w tomach VII (z 1937 roku), VIII i X (z 1938 roku).

Czy coś więcej wiadomo o tej przygotowywanej książce Banacha? Może chodziło o badania Schaudera, Mazura i Orlicza oraz Kernera? Sam Banach w sierpniu 1935 roku wpisał w *Księdze Szkockiej* problem 87. o interpolacji operatorów Lipschitza (zob. [38, str. 161; 40, str. 249–252]), a w 1938 roku opublikował pracę [7] o operatorach wielomianowych w L^2. Ponadto w artykule [6]


MONOGRAFJE MATEMATYCZNE
KOMITET REDAKCYJNY:
S. BANACH, B. KNASTER, K. KURATOWSKI,
S. MAZURKIEWICZ, W. SIERPIŃSKI i H. STEINHAUS
TOM I

THÉORIE
DES
OPÉRATIONS LINÉAIRES
PAR
STEFAN BANACH
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE LWÓW

Z SUBWENCJI FUNDUSZU KULTURY NARODOWEJ
WARSZAWA 1932

3. Okładka książki Stefana Banacha [5]

czytamy, że Banach omawiał rezultaty i ich zastosowania z teorii liniowych, wielomianowych i analitycznych operatorów na przestrzeniach Banacha oraz twierdzenia o punkcie stałym i teorię Leraya–Schaudera. Zakończył omawianie rezultatami o operatorach w przestrzeniach Hilberta. Szkoda, że nie zachował się żaden inny ślad dotyczący tematu tej monografii.

5. Przestrzenie quasi-Banacha

W tym przypadku w miejsce nierówności trójkąta $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ zakładamy słabszy warunek, a mianowicie nierówność trójkąta z pewną stałą $C \geqslant 1$, tzn. istnienie takiego $C \geqslant 1$, że

$$\|x + y\| \leqslant C(\|x\| + \|y\|) \quad \text{dla dowolnych } x, y \in X.$$

Przykładowo, przestrzeń $L^p = L^p[a, b]$ dla $p \in (0, 1)$ jest przestrzenią quasi-Banacha z quasi-normą $\|x\|_p = (\int_a^b |x(t)|^p \, \mathrm{d}t)^{1/p}$, gdyż

$$\|x + y\|_p \leqslant 2^{1/p-1}(\|x\|_p + \|y\|_p) \quad \text{dla dowolnych } x, y \in L^p.$$



Die „Mathematischen Monographien" erscheinen als kartonierte Oktavbände von ungefähr 150 bis 300 Seiten.

Bis jetzt sind erschienen:

Band I. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, VIII+256 Seiten, Preis 3 Dollar U.S.A.

Band II. S. Saks, Théorie de l'intégrale (vergriffen), X+292 Seiten, Preis 4 Dollar U.S.A.

Band III. C. Kuratowski, Topologie I, X+288 Seiten, Preis 4,50 Dollar U.S.A.

Band IV. W. Sierpiński, Hypothèse du continu, VI+194 Seiten, Preis 3,50 Dollar U.S.A.

Band V. A. Zygmund, Trigonometrical Series, IV+352 Seiten, Preis 5 Dollar U.S.A.

Band VI. S. Kaczmarz und H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, VI+300 Seiten, Preis 5 Dollar U.S.A.

In Vorbereitung (unter anderen):

S. Banach, Théorie générale des opérations,
C. Kuratowski, Topologie II,
S. Mazur, Allgemeine Limitierungstheorie,
S. Saks, Theory of Integral (englische, neu bearbeitete Auflage),
J. Schauder, Partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typus,
A. Tarski, Arithmetik der Kardinalzahlen.

Die Bände sind portofrei gegen eine direkt an

„MONOGRAFJE MATEMATYCZNE"
SEMINAR. MATEMAT. UNIWERS.
WARSZAWA (Polen), OCZKI Nr. 3,

gerichtete Bestellung unter gleichzeitiger Überweisung des Betrages (oder dessen Einzahlung auf das Polnische Postscheckkonto P.K.O. N°45.177 Prof. Dr. K. Kuratowski „Monografje Matematyczne", Warszawa) zu beziehen. Auch in Buchhandlungen erhältlich.

Der Preis dieses Bandes beträgt 5 Dollar U.S.A.

Die Mitglieder der Polnischen Mathematischen Gesellschaft erhalten jeden Band zum Vorzugspreise von 15 zł. (in 3 Monatszahlungen).

4. Anons o przygotowywanej książce Banacha na okładce książki Kaczmarza i Steinhausa

Oczywiście, funkcjonał $\|\cdot\|_p$ jest jednorodny, tzn. $\|\lambda x\|_p = |\lambda|\,\|x\|_p$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$ lub $\lambda \in \mathbb{C}$, oraz $\|x\|_p = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$ prawie wszędzie na $[a, b]$. Oznacza to, że $\|\cdot\|_p$ jest quasi-normą, a przestrzeń L^p jest przestrzenią quasi-Banacha. Jednak przestrzeń L^p nie jest normowalna, tzn. nie można w L^p wprowadzić normy. Ponadto, przestrzeń dualna jest jednoelementowa, tzn. $(L^p[a, b])^* = \{0\}$. To twierdzenie ilustruje istotną różnicę pomiędzy przestrzeniami Banacha i przestrzeniami quasi-Banacha.

Badanie przestrzeni quasi-Banacha jest dość popularne od jakiegoś czasu, co możemy prześledzić m.in. w następujących publikacjach (chronologicznie): [33, 34, 39, 51].

Podziękowania. Dziękuję Janowi Strelcynowi z Paryża za korektę tekstu, sprawdzenie wielu faktów historycznych oraz za uwagi merytoryczne. Ponadto dziękuję Redakcji *Wiadomości Matematycznych* za cenne uwagi językowe oraz merytoryczne.

Bibliografia

[1] S. Banach, *Sur les opérations dans ensembles abstraites et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math. 3 (1922), 133–181.

[2] S. Banach, *Sur les fonctionnelles linéaires I, II*, Studia Math. 1 (1929), 211–216, 223–239.

[3] S. Banach, *Teorja operacyj, T. 1, Operacje linjowe*, Wydawnictwo Kasy im. Mianowskiego, Instytutu Popierania Nauki, Warszawa 1931.

[4] S. Banach, *Über metrische Gruppen*, Studia Math. 3 (1931), 101–113.

[5] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Monografie Matematyczne, t. I, Warszawa 1932.

[6] S. Banach, *Die Theorie der Operationen und ihre Bedeutung für die Analysis*, C. R. Congr. Int. Math. 1 (1937), 261–268.

[7] S. Banach, *Über homogene Polynome in* (L^2), Studia Math. 7 (1938), 36–44.

[8] S. Banach, *Oeuvres*, t. II, PWN, Warszawa 1979.

[9] S. Banach, S. Mazur, *Eine Bemerkung über die Konvergenzmengen von Folgen linearer Operationen*, Studia Math. 4 (1933), 90–94.

[10] S. Banach, H. Steinhaus, *Sur le principe de la condensation de singularités*, Fund. Math. 9 (1927), 50–61.

[11] A. A. Bennett, *Newton's method in general analysis*, Proc. Nat. Acad. Sci. 2 (1916), nr 10, 592–598.

[12] M. Bernkopf, *The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory*, Arch. History Exact Sci. 3 (1966), 1–96.

[13] G. Birkhoff, E. Kreyszig, *The establishment of functional analysis*, Historia Math. 11 (1984), nr 3, 258–321.

[14] H. F. Bohnenblust, A. Sobczyk, *Extensions of functionals on complex linear spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938), 91–93.

[15] S. Dolecki, G. H. Greco, *The forgotten mathematical legacy of Peano*, Dissertationes Math. 537 (2019), 1–77.

[16] R. Duda, *On the origins of Functional Analysis and the Lvov school*, Comm. Math. Tomus specialis in honorem Iuliani Musielak 2004 (2004), 5–45.

[17] R. Duda, *The discovery of Banach spaces*, [w:] *European Mathematics in the Last Centuries* (W. Więsław, red.), Stefan Banach International Mathematical Center, Institute of Mathematics Wrocław University, Wrocław 2005, 37–46.

[18] R. Duda, *Lwowska Szkoła Matematyczna*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 2007.

[19] R. Duda, *Historia matematyki w Polsce na tle dziejów nauki i kultury*, Instytut Historii Nauki im. L. i A. Birkenmajerów PAN, Warszawa 2019.

[20] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley, New York 1958.

[21] E. Fischer, *Sur la convergence en moyenne*, C. R. Acad. Sci. Paris 144 (1907), 1022–1024.

[22] M. Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rend. Circ. Mat. Palermo 22 (1906), 1–74.
[23] M. Fréchet, *Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris 144 (1907), 1414–1416.
[24] M. Fréchet, *Les espaces vectoriels abstraits*, Bulletin Calcutta Math. Soc. 16 (1926), nr 2, 51–62.
[25] M. Fréchet, *Les espaces abstraits topologiquement affines*, Acta Math. 47 (1926), nr 1–2, 25–52.
[26] M. Fréchet, *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale*, Gauthier-Villars, Paris 1928.
[27] J. Hadamard, *Sur les opérations fonctionelles*, C. R. Acad. Sci. Paris 136 (1903), 351–354.
[28] H. Hahn, *Über Folgen linearer Operationen*, Monatsh. Math. Physik 32 (1922), 3–88.
[29] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig 1914.
[30] E. Helley, *Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Monatsh. Math. Physik 32 (1921), 60–91.
[31] E. Jakimowicz, A. Miranowicz (red.), *Stefan Banach. Niezwykłe życie i genialna matematyka*, Wydanie III, Oficyna Wydawnicza „Impuls", Kraków 2010.
[32] F. Jaëck, *Generality and structures in functional analysis: the influence of Stefan Banach*, [w:] *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences*, Oxford University Press, Oxford 2016, 223–254.
[33] N. Kalton, *Quasi-Banach spaces*, [w:] *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, t. 2, North-Holland, Amsterdam 2003, 1099–1130.
[34] N. J. Kalton, N. T. Peck, J. W. Roberts, *An F-space Sampler*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1984.
[35] A. Kufner, O. John, S. Fučik, *Function Spaces*, Academia, Prague 1977.
[36] K. W. Lamson, *A general implicit function theorem with an application to problems of relative minima*, Amer. J. Math. 42 (1920), nr 4, 243–256.
[37] P. Lévy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris 1922.
[38] L. Maligranda, *Commentary to Banach's 87 problem from the Scottish Book*, [w:] *The Scottish Book. Mathematics from the Scottish Café* (D. Mauldin, red.), Birkhäuser, Boston 1981, 161–170.
[39] L. Maligranda, *Type, cotype and convexity properties of quasi-Banach spaces*, [w:] *Banach and Function Spaces* (M. Kato, L. Maligranda, red.), Yokohama Publishers, Yokohama 2004, 83–120.
[40] L. Maligranda, *Osiągnięcia polskich matematyków w teorii interpolacji operatorów: 1910–1960*, Wiad. Mat. 51 (2015), nr 2, 239–281.
[41] V. Maz'ya, *Sobolev Spaces with Applications to Elliptic Partial Differential Equations*, Springer, Berlin 2011.
[42] A. F. Monna, *Functional Analysis in Historical Perspective*, Wiley, New York–Toronto 1973.

[43] O. Nikodym, *Sur une classe de fonctions considérée dans l'étude du problème de Dirichlet*, Fund. Math. 21 (1933), 129–150.
[44] G. Peano, *Calcolo geometrico secondo Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, Fratelli Bocca, Torino 1888.
[45] A. Pietsch, *History of Banach Spaces and Linear Operators*, Birkhäuser, Boston 2007.
[46] F. Riesz, *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions*, C. R. Acad. Sci. Paris 144 (1907), 615–619.
[47] F. Riesz, *Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables*, C. R. Acad. Sci. Paris 144 (1907), 1409–1411.
[48] F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, Math. Ann. 69 (1910), nr 4, 449–497.
[49] F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires a une infinité d'inconnues*, Gauthier-Villars, Paris 1913.
[50] F. Riesz, *Über lineare Funktionalgleichungen*, Acta Math. 41 (1918), 71–98.
[51] S. Rolewicz, *Metric Linear Spaces*, Monografie Matematyczne, t. 56, PWN – Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1972.
[52] J. P. Schauder, *Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen*, Studia Math. 2 (1930), 1–6.
[53] H. Steinhaus, *Additive and stetige Funktionaloperationen*, Math. Zeit. 5 (1919), nr 3–4, 186–221.
[54] H. Steinhaus, *Anwendungen der Funktionalanalysis auf einige Fragen der reellen Funktionentheorie*, Studia Math. 1 (1929), 51–81.
[55] G. A. Sukhomlinov, *O prodolzhenii liniejnykh funkcjonalov v kompleksnom i kvaterionnom liniejnom prostranstvie*, Mat. Sbornik 3 (1938), nr 2, 353–357.
[56] H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, Springer, Berlin 1918.
[57] N. Wiener, *On the theory of sets of points in terms of continuous transformations*, [w:] *C. R. Congrès Int. Math. (22–30 Septembre 1920)* (H. Villat, red.), Toulouse 1921, 312–315.
[58] N. Wiener, *Limit in terms of continuous transformation*, Bull. Soc. Math. France 50 (1922), 119–134.
[59] N. Wiener, *The group of the linear continuum*, Proc. London Math. Soc. (2) 20 (1922), nr 5, 329–346.
[60] N. Wiener, *Note on a paper of M. Banach*, Fund. Math. 4 (1923), nr 1, 136–143.

Lech Maligranda
Department of Engineering Sciences and Mathematics
Luleå University of Technology
Instytut Matematyki
Politechnika Poznańska
lech.maligranda@ltu.se, lech.maligranda@put.poznan.pl

– Znaczy to – podjął hrabia de Haga – że aby uzyskać dwa lata młodości, trzeba wypić całą rzekę.

Wszyscy się zaśmiali.

– Nie – powiedział Condorcet – rachunek jest prosty: trzydzieści pięć kropel na trzydzieści pięć minut, więc ledwie trzy miliony sto pięćdziesiąt trzy tysiące i sześć kropel, jeśli chce się pozostać młodym przez rok.

[...]

– Ale w takim razie, panie – wtrącił Condorcet – udowadniasz pan więcej, niż było w założeniu...

– Cóż udowadniam, panie markizie?

– Udowadnia nam pan nie tylko wieczną młodość, ale i zachowanie życia. Jeśli bowiem ma pan lat czterdzieści od czasów wojny trojańskiej, znaczy to, żeś nigdy nie umarł.

[...]

– Nie twierdzę, że jestem nieśmiertelny, mówię tylko, iż wiem, czego nikt inny nie wie – jak umknąć przypadkowej śmierci. I tak na przykład nie zostałbym tu sam ani kwadransa z panem de Launay, który myśli w tej chwili, że gdyby zamknął mnie w jednej z cel Bastylii, wypróbowałby moją nieśmiertelność głodem. Nie zostałbym także z panem de Condorcet, bo on przemyśliwa właśnie, jak wsypać do mego kielicha truciznę, którą nosi w pierścieniu na wskazującym palcu lewej ręki. Bez złych zamiarów zresztą, z naukowej ciekawości, by dowiedzieć się, czy umrę.

[...]

– Tak – przerwał hrabia de Haga – król Francji to biegły geograf, prawda, panie de Condorcet?

– Bieglejszy niż to królowi potrzebne – odparł markiz. – Lepiej, by monarchowie posiadali mniejszą znajomość przedmiotu, a częściej pozwalali doradzać sobie ludziom, co znają go dogłębnie.

Alexandre Dumas, *Naszyjnik królowej*, przełożyła Wanda Błońska

Wiad. Mat. 56 (1) 2020, 29–62
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Krzysztof Ciesielski (Kraków)

O matematycznej teorii wyborów

Ostatnio coraz częściej zdarza się, że w rozmaitych tekstach (w tym przekładach) czy pogadankach matematycznych autorzy, tłumacze i prelegenci nawiązują do spraw związanych z wyborami i przy okazji wprowadzają (różne) nazewnictwo. Autor tego tekstu od trzydziestu lat zajmuje się matematycznymi aspektami wyborów, a od ośmiu prowadzi na Uniwersytecie Jagiellońskim wykład monograficzny na ten temat. Celem artykułu jest przedstawienie wybranych pojęć i twierdzeń teorii wyborów oraz zaproponowanie związanej z nimi polskiej terminologii matematycznej (często przy wykorzystaniu nazewnictwa angielskiego).

1. Wstępne założenia i podstawowe definicje

Słowo „wybory" kojarzy się przede wszystkim z wyborami władz na różnych szczeblach (prezydent, Sejm, rada miasta, prezydent miasta, przewodniczący samorządu klasowego), jednak obejmuje ono znacznie szerszy zakres. Można na przykład rozważyć grupę turystów na wycieczce górskiej, którzy muszą zadecydować, jakim szlakiem pójdą następnego dnia. Może się zdarzyć, że kilka osób wpłaci pewne kwoty (niekoniecznie takie same), za zebraną sumę kupi kilkanaście identycznych obiektów i trzeba te obiekty sensownie podzielić między wpłacających.

Rozważmy zatem dwa niepuste, skończone zbiory: W (w domyśle – zbiór wyborców) oraz K (zbiór kandydatów). Zakładamy, że każdy wyborca (czyli $w \in W$) w jakiś sposób (a można rozważać bardzo różne sposoby, o czym mowa będzie dalej) oddaje głos, przyporządkowując kandydatom pewien układ

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

preferencji. Oczywiście najprostszym przykładem jest wybór jednego kandydata ze zbioru K przez każdego z wyborców i w efekcie wybranie jednego zwycięzcy spośród kandydatów.

Metodą głosowania nazywać będziemy regułę, w oparciu o którą wyznaczany jest końcowy rezultat wyborów (końcowe rezultaty wyborów możemy traktować jako wartości funkcji, której argumentami są zestawy preferencji wszystkich wyborców). *Model* zaś to właśnie zestaw takich preferencji. Metoda głosowania jest to po prostu funkcja, która każdemu modelowi (opisanemu przez preferencje wszystkich elementów zbioru W) przypisuje pewien końcowy rezultat (określony w zbiorze K).

Sformułujmy dwie podstawowe, a bardzo ważne definicje. Metoda głosowania jest *anonimowa*, jeśli wszyscy wyborcy traktowani są tak samo, a *neutralna*, jeśli wszyscy kandydaci traktowani są tak samo. Formalnie – metoda jest anonimowa, gdy spełniony jest warunek: jeśli w dowolnym modelu dwaj dowolni wyborcy zamienią się głosami, to końcowy wynik się nie zmieni. Metoda jest neutralna, gdy spełnia warunek: jeśli w dowolnym modelu i dla dowolnych dwóch kandydatów A, B wszyscy wyborcy zmienią w swoich głosach A oraz B rolami, to końcowy wynik ulega odpowiedniej – ze względu na A i B – zmianie.

Mogłoby się wydawać, że metody nie spełniające któregoś z dwóch powyższych warunków są ewidentnie dziwne i nienaturalne. Jest jednak inaczej – oto przykłady. Niejednokrotnie zdarza się, że w głosowaniach, w których uczestniczą akcjonariusze pewnej spółki, głos każdego z nich ma wagę równą wartości akcji, które ta osoba posiada. Podobnie jest ze wspólnotami mieszkaniowymi. Waga głosu właściciela mieszkania zależy od jego udziału we własności nieruchomości. Brak neutralności jest, paradoksalnie, jeszcze nam bliższy. Otóż głosowanie na posiedzeniu Sejmu, senatu wyższej uczelni czy rady wydziału to też są wybory! Często w takim głosowaniu kandydatów jest dwóch: obecnie obowiązujący stan prawny oraz głosowana uchwała – propozycja zmiany (kandydaci w wyborach to wcale nie muszą być konkretne osoby czy partie). Jeśli liczby głosów „za" i „przeciw" będą równe, to proponowana uchwała nie przechodzi i obowiązuje dotychczasowy stan prawny, on więc jest zwycięzcą – niezależnie od tego, którzy posłowie czy członkowie Rady Wydziału głosowali „za". Ta metoda głosowania, jakże powszechna, nie jest neutralna.

Możemy wyróżnić trzy podstawowe rodzaje metod głosowania:

- *metoda zwycięzcy* (wynikiem głosowania jest podzbiór zbioru kandydatów, czyli zwycięzca lub zwycięzcy)
- *metoda porządkowa* (wynikiem głosowania jest słaby porządek w zbiorze kandydatów)
- *metoda rozdziału* (kandydatom zostają przyporządkowane pewne liczby).

2. Metody zwycięzcy

Metodę zwycięzcy nazwiemy *klasyczną*, jeśli każdy wyborca głosuje na dokładnie jednego kandydata i te głosy są „tyle samo warte". Jeśli więc Σ oznacza zbiór wszystkich modeli, to metoda klasyczna jest funkcją $f\colon \Sigma \to P(K)$, przy czym $P(K)$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru K. Modelem zaś w takiej sytuacji jest funkcja $M\colon W \to K$. Istotnie: w modelu każdemu wyborcy przyporządkowany jest wybrany przez niego kandydat, a efektem jest zbiór zwycięzców (chcielibyśmy zazwyczaj, by był on jednoelementowy, ale teoria dopuszcza większe podzbiory, a także zbiór pusty). Metodę zwycięzcy nazwiemy *semi-klasyczną*, jeśli każdy wyborca głosuje na co najmniej jednego kandydata (również tu wszystkie głosy mają tę samą wagę, także jeśli dopuszczamy różne liczby kandydatów, na które wyborcy oddają głosy). Wtedy modelem jest funkcja $M\colon W \to P(K) \setminus \{\varnothing\}$.

Najwyższy czas, by podać kilka przykładów. Klasycznymi metodami zwycięzcy są metoda większości i metoda bezwzględnej większości. W metodzie większości zwycięzcą zostaje kandydat, który dostaje największą liczbę głosów (oczywiście może się zdarzyć, że zwycięzców jest więcej niż jeden). W każdym modelu wyłoniony zostaje zwycięzca. W metodzie bezwzględnej większości zwycięzcą zostaje kandydat, który dostaje ponad połowę głosów. Tu z kolei może się zdarzyć, że zwycięzcy nie ma, ale jeśli jest, to jest on jedyny. Dwie inne metody to *dyktatura* i *monarchia*. W dyktaturze wyróżniony jest jeden wyborca (nazywany *dyktatorem*), którego głos jest w każdym modelu tożsamy z końcowym wynikiem. Z kolei w monarchii zwycięzcą zostaje pewien ustalony z góry kandydat, który wygrywa w każdym modelu – niezależnie od tego, jak głosują wyborcy.

Uogólnieniem metody bezwzględnej większości jest *metoda większości ważonej*. Przyjmijmy, że $W = \{a_1, \ldots, a_n\}$ i że głos wyborcy a_i ma wagę w_i ($w_i \geqslant 0, w_1 + \cdots + w_n > 0$). Zwycięzcą zostaje kandydat, który w wyniku głosowania zdobędzie liczbę większą niż $\frac{w_1+\cdots+w_n}{2}$. Jeśli $w_i = 1$ dla każdego i, to metoda ta sprowadza się do metody bezwzględnej większości. Ze względu na to, że głosy wyborców mogą mieć różną wagę, ta metoda tylko w przypadku, gdy wszystkie liczby w_i są równe, jest metodą klasyczną.

Kolejne metody, o których jeszcze będzie mowa, to *metoda n głosów* oraz *słaba metoda n głosów* (dla konkretnych n). W obu metodach każdy wyborca wybiera n kandydatów ($1 \leqslant n < \#K$, przy czym przez $\#K$ oznaczamy liczbę elementów K), traktując ich idealnie równo (można to interpretować w ten sposób, że każdy z n kandydatów dostaje od wyborcy po jednym punkcie). Różnica między tymi metodami polega na tym, że w metodzie n głosów zwycięzcą zostaje

jeden kandydat, który ma najwięcej głosów, a w słabej metodzie z założenia wyłonionych zostaje *n* zwycięzców. W przypadku remisów na „końcowych" zwycięskich miejscach liczbę zwycięzców się powiększa. Słabą metodą dwóch głosów przez wiele lat wybierani byli senatorowie Rzeczpospolitej Polskiej (z minimalną modyfikacją w przypadku równej liczby głosów na drugim i trzecim miejscu, ale taki przypadek nigdy nie zaistniał).

I jeszcze dwie ważne definicje. Metoda zwycięzcy jest *decyzyjna*, jeśli w każdym modelu wyłania dokładnie jednego zwycięzcę, a *efektywna*, jeśli w każdym modelu wyłania przynajmniej jednego zwycięzcę.

3. Metody zakładające uporządkowanie

Pewnymi szczególnymi a ważnymi metodami zwycięzcy są *metody zakładające uporządkowanie*. W nich każdy wyborca ustawia wszystkich kandydatów w porządku liniowym i od tego porządku zależy jego głos.

Rozważmy stosunkowo prosty przykład. Wyborców jest 55, a kandydatów jest pięcioro. Kandydatami są Puchatek, Tygrys, Królik, Maleństwo i Sowa Przemądrzała. Może się zdarzyć, że u każdego wyborcy kolejność ich ustawienia jest inna ($5! > 55$). My jednak rozważmy bardzo prostą sytuację – każdy wyborca szereguje kandydatów według jednej z sześciu możliwości, według poniższego schematu. W pierwszym rzędzie podana jest liczba wyborców, o preferencjach przedstawionych w odpowiedniej kolumnie.

	14	11	10	9	6	5
1.	P	T	K	S	M	P
2.	M	K	S	M	K	S
3.	T	S	M	K	S	M
4.	S	M	T	T	T	T
5.	K	P	P	P	P	K

Czy w tej sytuacji można w sposób jednoznaczny określić zwycięzcę? Głosować można różnie. Można, nie przejmując się kolejnością, po prostu głosować na najlepszego – zdaniem wyborcy – kandydata, czyli zastosować metodę większości, Wtedy wygra Puchatek, który ma najwięcej (19) pierwszych miejsc. Można jednak zastosować *metodę prezydencką*, czyli z drugą turą, do której wejdą dwaj kandydaci z największą liczbą głosów (czyli ci, którzy zajęli pierwsze i drugie miejsce). Wtedy wygra Tygrys – zauważmy, że wszyscy, którzy nie postawili Puchatka na pierwszym miejscu, stawiają go na miejscu ostatnim, więc w bezpośrednim pojedynku każdy z Puchatkiem wygrywa. Można zagłosować

tak, jak się przez lata wybierało rektora czy dziekana na wielu polskich wyższych uczelniach – każdy głosuje na jednego kandydata, po czym usuwa się tego, kto ma najmniej zgłoszeń i głosuje ponownie, aż do momentu, gdy ktoś dostanie ponad 50% głosów. Ta metoda nosi nazwę *metody Hare'a*[1], przy czym zarówno w tej metodzie, jak i w metodzie prezydenckiej, troszkę inaczej niż w wariantach stosowanych w Polsce określa się warunki wejścia do następnej tury w przypadkach uzyskania takich samych liczb głosów; tym się jednak nie będziemy zajmować, zwłaszcza że to przypadki raczej rzadkie. W metodzie Hare'a w naszym przykładzie wygra Królik – odpadną kolejno Maleństwo, Sowa, Tygrys i Puchatek. Można punktować: za każde pierwsze miejsce 4 punkty, za każde drugie 3 punkty, aż do zera – wtedy wygra Maleństwo z wynikiem 134 punktów. Ta metoda nosi nazwę *metody punktów Bordy*[2]. Zgodnie z propozycją Bordy z 1770 roku, tę metodę zaczęto stosować przy wyborze członków francuskiej *L'Académie des sciences* dla trzech kandydatów, dając kandydatom dwa, jeden i zero punktów. Tę metodę, uogólnioną na liczby $n-1, n-2, \ldots, 0$, stosowano tam aż do jej zmiany przez Napoleona. Właśnie Borda zapoczątkował badania nad procedurami wyborczymi. Metodą punktów Bordy (nieznacznie zmodyfikowaną, z większą liczbą przydzielanych zer) przez lata wybierano sportowca roku w plebiscytach organizowanych przez *Przegląd Sportowy* oraz *Tempo*.

Podaliśmy cztery sensowne i stosowane (także współcześnie) metody, w których wygrywali Puchatek, Tygrys, Królik, Maleństwo. Można zadać pytanie, czy jest jakaś logicznie wyglądająca metoda, w której w tym przykładzie wygra Sowa. Jak najbardziej. Stwierdzenie, że jeśli ktoś w bezpośrednim pojedynku wygra ze wszystkimi innymi, to jest najlepszy, nie powinno budzić kontrowersji. Co to znaczy „w bezpośrednim pojedynku"? Kandydat *A wygrywa w bezpośrednim pojedynku* z kandydatem *B*, jeśli więcej osób stawia *A* wyżej niż *B*. Przy takim sposobie wyłaniania zwycięzcy wygrywa właśnie Sowa, pokonując Puchatka stosunkiem głosów 36:19, Maleństwo 35:20, Tygrysa 30:25 i Królika 28:27. Ta metoda, w przeciwieństwie do czterech poprzednich nie jest efektywna – może (co jest mocno prawdopodobne) się zdarzyć, że nie będzie kandydata, który wygra ze wszystkimi. Można temu jednak łatwo zaradzić za pomocą drobnej modyfikacji. Przyznawajmy za zwycięstwo w bezpośrednim pojedynku punkt, a za remis – po pół punktu. Wygrywa kandydat, który zdobędzie najwięcej punktów. Ta metoda nosi nazwę *metody Copelanda*[3].

[1] Sir Thomas Hare (1806–1891), angielski prawnik i polityk.

[2] Jean Charles de Borda (1733–1799), francuski matematyk, fizyk i oficer marynarki, członek francuskiej *L'Académie des sciences*. Jego nazwisko znajduje się wśród siedemdziesięciu dwóch nazwisk uczonych i inżynierów na wieży Eiffla.

[3] Arthur Herbert Copeland (1891–1970), amerykański matematyk; wraz z Paulem Erdősem zdefiniował liczbę nazywaną dziś *stałą Erdősa–Copelanda*.



Nazwisko Bordy na wieży Eiffla (fot. K. Ciesielski)

Jeśli porównujemy kandydatów na zasadzie „każdy z każdym", to może się okazać, że nie da się wyłonić zwycięzcy (jak w grze „papier, nożyce, kamień"). Tu pojawia się słynny *paradoks Condorceta*[4], kluczowy w rozmaitych aspektach matematyki wyborczej. Condorcet był jednym z pionierów badań nad matematycznymi aspektami wyborów. W 1785 roku opublikował poświęcony tej tematyce esej. Przyjmijmy, że kandydatów jest trzech, a wyborcy ustawiają ich w kolejności pokazanej poniżej.

	n	*n*	*n*
1.	*A*	*B*	*C*
2.	*B*	*C*	*A*
3.	*C*	*A*	*B*

[4] Marie-Jean-Antoine-Nicolas de Caritat, markiz de Condorcet (1743–1794), francuski matematyk, ekonomista i polityk. Jest jedną z postaci występujących w prologu powieści Alexandre'a Dumasa *Naszyjnik królowej* (zob. str. 28 i 142 w tym zeszycie *Wiadomości Matematycznych*).



Znaczek z markizem de Condorcet wydany we Francji w 1989 roku.
Condorcet został upamiętniony na znaczku nie ze względu na osiągnięcia naukowe,
ale z okazji dwusetnej rocznicy rewolucji francuskiej

Wówczas A wygrywa z B stosunkiem głosów $2n : n$, B tak samo wygrywa z C, C zaś wygrywa z A. Każde zwycięstwo w danej parze jest idealnie takie same – i kto jest najlepszy?

Istnieją, oczywiście, inne metody zakładające uporządkowanie. Dyktatura, monarchia, metoda *n* głosów i słaba metoda *n* głosów już zostały wspomniane – bo oczywiście je wszystkie można stosować także w sytuacji, gdy wyborcy porządkują kandydatów. Kolejne metody to *metoda Coombsa*[5] i *metoda odrzuceń ostatniego*. Działają podobnie jak metoda Hare'a, przy czym odrzuca się tego kandydata, który ma najwięcej ostatnich miejsc. Różnica między tymi dwiema metodami polega na tym, że w metodzie Coombsa zwycięzca zostaje wyłoniony, gdy ktoś będzie miał ponad połowę pierwszych miejsc, a w metodzie odrzuceń ostatniego usuwamy kandydatów do momentu, gdy zostanie jeden. Te metody nie są tożsame, o czym przekonuje przykład z poniższego modelu.

	4	2	3
1.	*C*	*B*	*B*
2.	*A*	*C*	*A*
3.	*B*	*A*	*C*

[5] Clyde Hamilton Coombs (1912–1988), amerykański psycholog, zajmujący się psychologią matematyczną.

W metodzie Coombsa wygrywa B, którego pięciu wyborców (z dziewięciu) ustawiło na pierwszym miejscu. Tymczasem w metodzie odrzuceń ostatniego B, z czterema ostatnimi miejscami, odpada jako pierwszy, po czym C wygrywa z A stosunkiem głosów 6 : 3.

Podajmy teraz kilka warunków dotyczących metod zakładających uporządkowanie. Wszystkie one wydają się nadzwyczaj naturalne i można sądzić, że jeśli metoda któregoś z nich nie spełnia, to nie jest dobra. Najpierw jednak przyjmijmy pewne oznaczenie. Zapis $A \overset{w,M}{<} B$ oznacza, że w modelu M wyborca w stawia kandydata B wyżej niż kandydata A. Przez Σ oznaczamy zbiór wszystkich modeli w metodzie.

A teraz zapowiedziane warunki. Metoda zakładająca uporządkowanie spełnia *słabą zasadę Pareto*[6], gdy

$$\forall M \in \Sigma,\ A, B \in K\ (\forall w \in W : A \overset{w,M}{<} B) \Rightarrow A \text{ nie wygrywa w } M.$$

Kandydata $A \in K$ nazywamy *kandydatem Condorceta*[7] w modelu M, jeśli wygrywa w bezpośrednim pojedynku z każdym innym kandydatem. Kandydata nazywamy *przegranym Condorceta*, jeśli przegrywa on w bezpośrednim pojedynku z każdym innym kandydatem.

Metoda zakładająca uporządkowanie spełnia *kryterium Condorceta*, gdy w każdym modelu kandydat Condorceta – o ile istnieje – jest jedynym zwycięzcą.

Metoda zakładająca uporządkowanie spełnia *kryterium przegranych Condorceta*, gdy w każdym modelu przegrany Condorceta – o ile istnieje – nie jest zwycięzcą.

Metoda zakładająca uporządkowanie jest *monotoniczna ze względu na transpozycje*, gdy – jeśli w modelu M kandydat A jest zwycięzcą, a model N utworzony jest z modelu M w ten sposób, że pewna liczba wyborców przesunie A o jedno miejsce wyżej – to w modelu N kandydat A też jest zwycięzcą.

Metoda zakładająca uporządkowanie spełnia *warunek jednoznacznej większości*, gdy – jeśli w modelu M istnieje kandydat, który przez ponad połowę wyborców jest postawiony na pierwszym miejscu – to jest on jedynym zwycięzcą.

Metoda zakładająca uporządkowanie spełnia *warunek niezależności porażki od ubocznych opcji* (*słabą niezależność porażki od ubocznych opcji*), gdy dla

[6] Vilfredo Pareto (1848–1923) – włoski ekonomista i socjolog.

[7] Bardziej logiczna byłaby nazwa *zwycięzca Condorceta*, analogiczna do *przegrany Condorceta*. Jednak termin angielski to *Condorcet candidate* – zagadnienia związane z kandydatami Condorceta rozważa się stosunkowo często, o przegranych Condorceta mowa jest rzadko.

dowolnych modeli M, N i dowolnych kandydatów A, B spełniających warunki

$$\forall w \in W : (A \overset{w,M}{<} B \Leftrightarrow A \overset{w,N}{<} B),$$
$$A \text{ nie wygrywa w } M, B \text{ wygrywa w } M,$$

kandydat A nie wygrywa w modelu N.

Wszystkie powyższe warunki, z wyjątkiem ostatniego, są proste i czytelne. Przyjrzyjmy się więc dokładniej temu ostatniemu. Wyobraźmy sobie, że w pewnym modelu startują Puchatek i Tygrys, wygrywa Puchatek. Zakładamy też, że Tygrys nie wygrywa (ten postulat jest istotny, gdyż nie wykluczamy tego, że zwycięzców może być więcej). I teraz przyjmijmy, że wyborcy zmieniają swoje preferencje, nie zmieniają jednak na swoich listach wzajemnego położenia Puchatka i Tygrysa. Ci, którzy stawiają Puchatka nad Tygrysem, dalej tak robią, choć wszystkich innych kandydatów mogą na swoich listach rozmaicie poprzestawiać. Podobnie ci, którzy postawili Tygrysa nad Puchatkiem, nie zmieniają tego układu. Może się zdarzyć, że w efekcie zmian Puchatek już nie wygra. Ale nie może się zdarzyć, że wygra Tygrys! Puchatek był od niego lepszy, więc w efekcie modyfikacji nie zmieniających ich wzajemnych układów Tygrys nie ma prawa mu dorównać albo go wyprzedzić, czyli nie ma prawa zostać zwycięzcą[8]. Nazwą warunku zajmiemy się później.

Okazuje się, że choć metody są sensowne, a warunki logiczne, często metody tych warunków nie spełniają. Kilka przykładów zostanie podanych w następnym paragrafie.

Czy istnieje dobra metoda wyboru? Odpowiedź na to daje słynne twierdzenie Arrowa[9].

Twierdzenie (Arrowa dla metod zwycięzcy)**.** *Jeśli* $\#K \geqslant 3$ *i* $\#W \geqslant 2$*, to jedyną metodą zakładającą uporządkowanie, która jest efektywna, spełnia słabą zasadę Pareto i warunek niezależności porażki od ubocznych opcji jest dyktatura.*

[8] Praktyczny przykład niespełnienia tego warunku ładnie pokazuje anegdota o amerykańskim filozofie, Sidneyu Morgenbesserze (1921–2004). Morgenbesser po zjedzeniu obiadu w restauracji chciał zamówić deser. Kelnerka powiedziała mu, że w menu jest szarlotka oraz ciasto z borówkami. Morgenbesser zamówił szarlotkę. Po chwili kelnerka podeszła do stolika i oznajmiła, że okazało się, że mają jeszcze ciasto z wiśniami. Na to Morgenbesser – „wobec tego zmieniam zamówienie, proszę o ciasto z borówkami". Jako proste ćwiczenie proponuję znalezienie metody wyboru deseru, którą mógł kierować się Morgenbesser.

[9] Kenneth Arrow (1921–2017), amerykański ekonomista i matematyk, laureat Nagrody Banku Szwecji im. Alfreda Nobla z ekonomii w 1972 roku. Nagroda ta jest często niepoprawnie nazywana Nagrodą Nobla. Ma ona to samo znaczenie, co Nagroda Nobla, jest jej równoważna finansowo i przyznawana w taki sam sposób przez Komitet Noblowski, jednak jej oficjalna nazwa jest inna (Sveriges Riksbanks pris i ekonomisk vetenskap till Alfred Nobels minne) i przyznawana jest z innych środków. Pierwsze nagrody w dziedzinie ekonomii przyznano w 1969 roku.

Jeżeli zatem te dwa warunki z założenia twierdzenia Arrowa uznamy za najważniejsze, to dojdziemy do konkluzji, że dyktatura jest najlepszą z możliwych efektywnych metod głosowania. Zauważmy, że dyktatura nie jest metodą anonimową. Z twierdzenia Arrowa wynika więc następujący wniosek.

Wniosek. *Jeśli* $\#K \geqslant 3$ *i* $\#W \geqslant 2$*, to nie istnieje metoda zakładającą uporządkowanie, która jest jednocześnie anonimowa, efektywna, spełnia słabą zasadę Pareto i warunek niezależności porażki od ubocznych opcji.*

Zauważmy, że rezultaty te dotyczą sytuacji przy *dowolnej, danej* liczbie kandydatów i wyborców (o ile $\#K \geqslant 3$ i $\#W \geqslant 2$). Uwaga – w sformułowaniu twierdzenia Arrowa nie ma ani założenia anonimowości, ani neutralności, ani też decyzyjności, jedynie efektywność. Jednoczesne założenie decyzyjności i anonimowości bardzo upraszczałoby problem przy parzystej liczbie wyborców, gdyż wystarczyłoby, by połowa z nich postawiła na pierwszym miejscu kandydata A, a na drugim B, druga połowa zaś – odwrotnie. Nie ma wtedy żadnych szans na odróżnienie roli A oraz B w końcowym wyniku. W twierdzeniu Arrowa wymagamy jedynie, by zwycięzca istniał – może być ich więcej. Natomiast decyzyjność odgrywa rolę w dowodzie twierdzenia Arrowa, gdyż przydatny w nim jest następujący lemat.

Lemat (o decyzyjności)**.** *Jeśli* $\#K \geqslant 3$ *i* $\#W \geqslant 2$*, a metoda zakładająca uporządkowanie jest efektywna, spełnia słabą zasadę Pareto i warunek niezależności porażki od ubocznych opcji, to jest ona decyzyjna.*

Dowód polega na przypuszczeniu, że w pewnym modelu M jest dwóch zwycięzców, A i B, po czym tworzeniu kolejnych modeli (z odpowiednimi przesunięciami A, B i innych kandydatów – a jest co najmniej jeden inny kandydat – by w efekcie otrzymać model, w którym nikt nie może wygrać. W dowodzie twierdzenia Arrowa wprowadza się pojęcie „dyktatora nad A z kontrolerem B" – jest to wyborca w, który stawiając B nad A powoduje, że w modelu M kandydat A nie wygrywa. Następnie wykazuje się, że jeśli wyborca w jest dyktatorem nad A z kontrolerem B, to jest on również dyktatorem nad B z kontrolerem A, a później, że jest dyktatorem nad każdą parą kandydatów. W dowodzie konstruuje się różne modele, w których zwycięzca jest zdeterminowany przez niezależność porażki od ubocznych opcji, decyzyjność (wynikającą z lematu) oraz słabą zasadę Pareto.

Inny ciekawy wynik o nieistnieniu „dobrej" metody głosowania podał Alan D. Taylor[10].

[10] Alan D. Taylor (ur. 1947), amerykański matematyk. Twierdzenie Taylora zostało po raz pierwszy opublikowane w pierwszym wydaniu książki [22] w 1995 roku.

Twierdzenie (Taylora)**.** *Jeśli* $\#K \geqslant 3$ *i* $\#W \geqslant 3$*, to nie istnieje metoda zakładającą uporządkowanie, która jest efektywna, spełnia kryterium Condorceta i warunek niezależności porażki od ubocznych opcji.*

Na zakończenie tego paragrafu sformułujemy jeszcze jedno zaskakujące twierdzenie, wykazane niezależnie przez Allana Gibbarda[11] w 1973 roku i Marka Satterthwaite'a[12] w 1975 roku. Najpierw jednak definicja. Mówimy, że metoda zakładająca uporządkowanie jest *podatna na manipulację*, jeśli istnieją wyborca w oraz modele M, N, różniące się jedynie głosem w i w modelu N zwycięzcą jest kandydat, którego w modelu M wyborca w ustawiał wyżej niż zwycięzcę w modelu M. Praktycznie oznacza to, że jeśli wyborca w zagłosuje niezgodnie ze swoimi prawdziwymi preferencjami, to doprowadzi do wyboru kandydata bardziej mu odpowiadającego.

Twierdzenie (Gibbarda–Satterthwaite'a)**.** *Jeśli* $\#K \geqslant 3$ *i* $\#W \geqslant 2$*, a metoda zakładająca uporządkowanie nie jest dyktaturą i dla każdego kandydata istnieje model, w którym ten kandydat wygrywa, to metoda jest podatna na manipulację.*

Modelem, w którym dany kandydat wygrywa, może na przykład być taki układ głosów, że wszyscy wyborcy stawiają tego kandydata na pierwszym miejscu, nie jest to więc założenie zbyt mocne. Czyż nie brzmi zaskakująco, że jedyną metodą nie dopuszczającą manipulacji jest dyktatura?

4. Kilka przykładów

Podamy teraz kilka przykładów pokazujących, że podane w poprzednim rozdziale naturalne warunki mogą nie być spełnione przez metody, które wydają się konstruktywnie wyłaniać zwycięzcę. Zacznijmy od monotoniczności ze względu na transpozycje.

	6	5	4	2
1.	*A*	*C*	*B*	*B*
2.	*B*	*A*	*C*	*A*
3.	*C*	*B*	*A*	*C*

W metodzie Hare'a w tym przykładzie wygra A (jako pierwszy odpada C, a potem A wygrywa z B). Jeśli jednak dwóch wyborców z ostatniej kolumny przesunie A o jedno miejsce wyżej, to w pierwszej turze odpadnie B, a w drugiej C

[11] Allan Gibbard (ur. 1942), amerykański matematyk i filozof.
[12] Mark A. Satterthwaite (ur. 1945), amerykański ekonomista.

wygra z *A* stosunkiem głosów 9 : 8. Metoda Hare'a nie jest zatem monotoniczna ze względu na transpozycje.

Metoda Coombsa nie spełnia ani kryterium Condorceta, ani kryterium przegranych Condorceta. Przekonują o tym dwa przykłady.

	2	1	1	1	2
1.	*E*	*D*	*A*	*C*	*B*
2.	*A*	*B*	*B*	*B*	*A*
3.	*D*	*A*	*C*	*D*	*C*
4.	*C*	*E*	*E*	*E*	*D*
5.	*B*	*C*	*D*	*A*	*E*

	2	2	2	1
1.	*D*	*B*	*C*	*B*
2.	*C*	*D*	*B*	*C*
3.	*A*	*A*	*A*	*D*
4.	*B*	*C*	*D*	*A*

W pierwszym przykładzie *B* jest kandydatem Condorceta. Wyborców jest siedmiu, a *B* od każdego innego kandydata co najmniej cztery razy ustawiony został na wyższej pozycji – odpada jednak już w pierwszej turze. W drugim przykładzie *A* jest przegranym Condorceta (z każdym przegrywa 2 : 5), a w pierwszej turze odpadają wszyscy pozostali kandydaci.

Metoda punktów Bordy nie jest jednoznacznie większościowa, co można zobaczyć na prostym przykładzie.

	3	2
1.	*A*	*B*
2.	*B*	*C*
3.	*C*	*A*

Kandydata *A* ponad połowa wyborców postawiła na pierwszej pozycji, uzyskał on jednak sześć punktów, *B* zaś siedem.

Zobaczmy, na czym polega warunek niezależności porażki od ubocznych opcji. Pokażemy to na przykładzie metody Copelanda (jak się okazuje, spełnia ona wszystkie pozostałe podane wyżej warunki). Rozważmy dwa modele.

	2	2	1	1
1.	*A*	*C*	*D*	*B*
2.	*D*	*A*	*B*	*C*
3.	*B*	*B*	*C*	*D*
4.	*C*	*D*	*A*	*A*

	2	2	1	1
1.	*A*	*C*	*D*	*B*
2.	*D*	*A*	*B*	*C*
3.	*C*	*B*	*C*	*D*
4.	*B*	*D*	*A*	*A*

Modele różnią się ustawieniem kandydatów *B* i *C* u dwóch pierwszych wyborców – najpierw stawiają oni *B* nad *C*, na trzecim i czwartym miejscu, po-

tem te pozycje ulegają zamianie. W pierwszym modelu w metodzie Copelanda jedynym zwycięzcą jest A, który zdobył dwa punkty ($A : B = 4 : 2$, $A : D = 4 : 2$, $B : C = 4 : 2$, $C : A = 4 : 2$, $B : D = 3 : 3$, $C : D = 3 : 3$); kandydat C uzyskał półtora punktu i nie wygrywa. W drugim modelu relacje A i C nie zmieniają się u żadnego z wyborców, jednak C u dwóch wyborców przesuwa się nad B, wynik $B : C$ zmienia się z $4 : 2$ na $2 : 4$, C dostaje dodatkowy punkt i wyprzedza A.

Trochę trudniej znaleźć metodę nie spełniającą słabej zasady Pareto, ale i takie istnieją. Na przykład *metoda terminarzowa* – polega ona na tym, że kandydaci zostają odgórnie ustawieni w ciąg, porównujemy dwóch pierwszych kandydatów, zwycięzcę w ich bezpośrednim pojedynku porównujemy z trzecim i tak dalej. Tak rozgrywane były kiedyś pewne teleturnieje. W poniższym przykładzie kandydatów ustawiono są w kolejności: A, B, C, D. W pierwszym pojedynku A wygra z B, w drugim A z C a w ostatnim D wygrywa z C i zostaje zwycięzcą, choć wszyscy wyborcy stawiają B nad D.

	1	1	1
1.	A	C	B
2.	B	A	D
3.	D	B	C
4.	C	D	A

5. Metody porządkowe

Przejdźmy do kolejnych metod wyborczych. Tym razem interesować nas będzie nie tylko zwycięstwo, ale coś więcej – ustawienie kandydatów w pewnej kolejności, zależnej od preferencji wyborców. *Metoda porządkowa* to metoda, w której każdy wyborca ustawia wszystkich kandydatów w porządku liniowym, a rezultatem wyborów w danym modelu jest pewien słaby porządek w zbiorze kandydatów. *Słaby porządek* w zbiorze X definiujemy następująco: w X wprowadzamy relację równoważności, w zbiorze ilorazowym określamy porządek liniowy i teraz mówimy, że $y \in X$ poprzedza $z \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy klasa równoważności elementu y poprzedza klasę elementu z. Oczywiście liniowy porządek jest słabym porządkiem (z jednoelementowymi klasami równoważności), a metoda zakładająca uporządkowanie jest metodą porządkową (w zbiorze K mamy dwie klasy równoważności – zwycięzcy i pozostali kandydaci). Niemniej, liczne metody zakładające uporządkowanie są metodami porządkowymi ze słabym porządkiem w zbiorze kandydatów ustalonym znacznie dokładniej niż tylko wyznaczenie zwycięzcy. W metodzie punktów Bordy i metodzie Copelan-

da kandydaci dostają pewne liczby punktów, które determinują kolejność ich ustawienia. W metodzie *n* głosów, w szczególności w metodzie większości, o kolejności decyduje liczba otrzymanych głosów. W metodach Hare'a, Coombsa i odrzuceń ostatniego – jeśli kandydat A odpadł później niż kandydat B, to zajmuje wyższą pozycję. Zamiast dyktatury możemy rozważać *dyktaturę porządkową* – tu głos dyktatora po prostu wyznacza ostateczną kolejność.

Zanim przejdziemy do kolejnych twierdzeń dotyczących matematycznej teorii wyborów, przedstawimy kilka kolejnych definicji – zazwyczaj naturalnych uogólnień tych już poznanych.

Zacznijmy od kolejnego oznaczenia. Zapis $A \underset{M}{<} B$ oznacza, że modelu M w efekcie wyborów kandydat B został umieszczony wyżej niż kandydat A.

Metoda porządkowa spełnia *porządkową zasadę Pareto*, gdy

$$\forall M \in \Sigma,\ A, B \in K\ (\forall w \in W : A \overset{w,M}{<} B) \Rightarrow A \underset{M}{<} B.$$

Metoda porządkowa spełnia *warunek niezależności od ubocznych opcji* (jest *niezależna od ubocznych opcji*), gdy

$$\forall M, N \in \Sigma,\ A, B \in K\ (\forall w \in W : A \overset{w,M}{<} B \Leftrightarrow A \overset{w,N}{<} B) \Rightarrow (A \underset{M}{<} B \Leftrightarrow A \underset{N}{<} B).$$

Innymi słowy, zmiana opinii wyborców, która u żadnego wyborcy nie zmienia wzajemnego ustawienia kandydatów A i B, nie może zmienić ostatecznego rezultatu w zakresie kolejności tych dwóch kandydatów.

I jeszcze jeden warunek. Metoda porządkowa spełnia *postulat liberalizmu Sena*[13], gdy

$$\forall w \in W\ \exists A, B \in K,\ A \neq B\ \forall M \in \Sigma\ (A \overset{w,M}{<} B \Rightarrow A \underset{M}{<} B),\ (B \overset{w,M}{<} A \Rightarrow B \underset{M}{<} A).$$

Chodzi tu o pewien – bardzo skromny – przywilej wyborców: by każdy wyborca miał choć jedną parę kandydatów, o której ostatecznym uporządkowaniu właśnie on decyduje. Wydawałoby się, że to niewiele. Tymczasem okazuje się, że nawet takie wymaganie jest zbyt duże.

Twierdzenie (Sena)**.** *Jeśli* $\#K \geqslant 2$ *i* $\#W \geqslant 2$*, to nie istnieje metoda porządkowa, spełniająca porządkową zasadę Pareto i postulat liberalizmu Sena.*

Dowód tego twierdzenia jest bardzo prosty. Przypuśćmy, że wyborca w decyduje o kolejności pary A, B, wyborca v zaś o kolejności pary C, D i wszyscy ci kandydaci są różni (w przypadku, gdy któryś kandydat występuje w obu

[13] Amartya Sen (ur. 1933), hindusko–amerykański ekonomista, laureat Nagrody Banku Szwecji im. Alfreda Nobla z ekonomii w 1988 roku.

parach, dowód jest jeszcze łatwiejszy) Niech wyborca w ustawi ich w kolejności D, A, B, C, a wszyscy pozostali, w tym v, w kolejności B, C, D, A. Ze względu na porządkową zasadę Pareto otrzymujemy, że $C \underset{M}{<} B$ i $A \underset{M}{<} D$, ale z postulatu liberalizmu Sena wynika, że $B \underset{M}{<} A$ i $D \underset{M}{<} C$. Wobec tego $A \underset{M}{<} D \underset{M}{<} C \underset{M}{<} B \underset{M}{<} A$. Uzyskaliśmy sprzeczność.

Znacznie głębsze matematycznie jest kolejne twierdzenie Arrowa. Najpierw przypomnijmy, że niepusta rodzina $\mathcal{F} \subset P(X)$ jest *filtrem* w niepustym zbiorze X, jeśli spełnia warunki:

1° $\varnothing \notin \mathcal{F}$,

2° jeśli $U, V \in \mathcal{F}$, to $U \cap V \in \mathcal{F}$,

3° jeśli $U \in \mathcal{F}$ i $U \subset V$, to $V \in \mathcal{F}$.

Filtr $\mathcal{F}$ nazywamy *utrafiltrem*, gdy $U \in \mathcal{F}$ lub $X \setminus U \in \mathcal{F}$ dla każdego zbioru $U \subset X$. Jeśli zbiór X jest skończony, to jedyne ultrafiltry w X to filtry generowane przez elementy X, czyli zbiory postaci $\{U \subset X : p \in U\}$ dla $p \in X$.

Na chwilę porzućmy założenie o skończoności zbiorów W i K. Możemy rozważać zbiory $\mathcal{L}(K)$ wszystkich liniowych porządków w K i $\mathcal{S}(K)$ wszystkich słabych porządków w K oraz zbiór $\Sigma = \{M\colon W \to \mathcal{L}(K)\}$. Oczywiście możemy interpretować Σ jako zbiór wszystkich modeli w metodzie porządkowej. Badamy funkcję $f\colon \Sigma \to \mathcal{S}(K)$, którą możemy traktować jako metodę porządkową.

Oczywiście przy tych założeniach możemy rozważać, określone tak samo jak wyżej, porządkową zasadą Pareto (oznaczmy ją przez (P)) oraz niezależność od ubocznych opcji (oznaczoną jako (N)). Wprowadźmy jeszcze jedno pojęcie. Mówimy, że zbiór $T \subset W$ jest *zbiorem decyzyjnym*, jeśli

$$\forall M \in \Sigma,\ A, B \in K\ \left(\forall w \in T : A \overset{w,M}{<} B\right) \Rightarrow A \underset{M}{<} B.$$

W interpretacji matematyki wyborczej oznacza to, że jeśli wszyscy wyborcy ze zbioru T ustawiają B nad A, to w końcowym wyniku B jest nad A. Innymi słowy, zgodna opinia wyborców z T na temat porównania dowolnej pary kandydatów determinuje końcowe ustawienie tych kandydatów.

I teraz możemy przejść do najważniejszego chyba twierdzenia matematyki wyborczej.

Twierdzenie (Arrowa w wersji ultrafiltru)**.** *Załóżmy, że* $\#K \geqslant 3$, $\#W \geqslant 2$ *i dana jest funkcja* $f\colon \Sigma \to \mathcal{S}(K)$ *spełniająca warunki* (P) *i* (N). *Wówczas rodzina wszystkich zbiorów decyzyjnych jest ultrafiltrem w* W.

Jako natychmiastowy wniosek otrzymujemy słynne twierdzenie Arrowa.

Twierdzenie (Arrowa)**.** *Jeśli $\#K \geqslant 3$, $\#W \geqslant 2$ i W jest zbiorem skończonym, to jedyną metodą porządkową spełniającą porządkową zasadę Pareto i warunek niezależności od ubocznych opcji jest dyktatura porządkowa.*

Istotnie, jeśli W jest skończony, to rodzina zbiorów decyzyjnych musi być ultrafiltrem generowanym przez jeden element, a więc pewien zbiór jednoelementowy jest zbiorem decyzyjnym. Oznacza to, że istnieje wyborca, który samodzielnie decyduje o końcowym wyniku wyborów.

Dowód twierdzenia Arrowa w wersji ultrafiltru nie jest prosty. Można go znaleźć w literaturze, jednak dość często w przedstawionych rozumowaniach omijane są pewne szczegóły, a czasami dowód przeprowadzany jest przy pewnych upraszczających założeniach.

Wróćmy teraz do nazwy warunku kluczowego dla teorii. Oryginalny angielski termin (wprowadzony przez Arrowa i powszechnie stosowany) brzmi *independence of irrelevant alternatives*, w skrócie *IIA*. Przez polskich autorów tłumaczony jest różnie, ale prawie zawsze występuje w przekładzie słowo „alternatywa"; często spotyka się nazwę „niezależność (od) nieistotnych alternatyw". Taki termin nie jest właściwy.

Angielskie słowo „alternative" i polskie „alternatywa" mają różne znaczenia! Zacytujmy hasło ze *Słownika Poprawnej Polszczyzny* [7] pod redakcją Witolda Doroszewskiego:

> **alternatywa** – sytuacja wymagająca wyboru [...] *niepoprawne* w zn. „jedna z możliwości", np. Ma przed sobą dwie alternatywy (*zamiast*: Ma przed sobą alternatywę a. Ma przed sobą dwie możliwości) [...]

A już naprawdę nie wypada używać takiego terminu w sytuacji, gdy mówimy o matematyce. *Alternatywa* to podstawowy termin logiki i teorii mnogości, wiadomo jak zdefiniowany – na pewno nieadekwatnie do sformułowania o „niezależności od alternatyw".

A co oznacza po angielsku „alternative"? Zacytujmy za słownikiem Collinsa [19]:

> **alternative** If one thing is an **alternative** to another, the first can be found, used or done instead of the second.

Nie można bezkrytycznie przenosić terminów angielskich na polskie, jeśli w języku polskim dane słowa istnieją i znaczą co innego. W matematyce nie mówimy o analizie kompleksowej (*complex analysis*) czy geometrii samolotu (*plane geometry*). Liczb kardynalnych nie nazywamy kardynałami (*cardinals*); nikt nie powie, że $\aleph_0$ to mały kardynał, a $\mathfrak{c}$ to trochę większy kardynał.

Dodajmy jeszcze, że w angielskiej terminologii matematycznej „alternatywa" to wcale nie „alternative", ale „alternation" lub „disjunction". W tym przypadku jest więc nawet gorzej, bo i przekład jest niewłaściwy! Tu dobrą analogią byłoby używanie terminu „ewentualnie okresowa" w sensie „eventually periodic" („eventually" oznacza „w końcu").

Być może, na wprowadzanie takiego terminu jakiś wpływ miał fakt, że sprawy wyborcze kojarzą się z polityką, a polscy politycy niejednokrotnie autorytarnie używają zwrotu „nie ma innej alternatywy".

Przejdźmy teraz do drugiego słowa w nazwie warunku. Słowo „nieistotny" nie jest odpowiednie. Po pierwsze, owe dodatkowe opcje, o których mowa w warunku, mogą się okazać (i zazwyczaj się okazują) nad wyraz istotne! A po drugie, co prawda jedno z angielskich znaczeń słowa „irrelevant" rzeczywiście oznacza „nieistotny", ale w tym kontekście mowa o innym, i to głównym, znaczeniu. Ponownie zacytujmy słownik [19]:

> **irrelevant** If you describe something such as a fact or remark as **irrelevant**, you mean that it is not connected with what you are discussing or dealing with.

Jan Stanisławski w słowniku [20] tłumaczy to słowo jako „nie związany z tematem, oderwany od tematu". Gdybyśmy jednak chcieli użyć w określeniu słowa „nie związany", koniecznie powinniśmy (wzorem Stanisławskiego) zaznaczyć, z czym te opcje nie są związane.

Termin *niezależność od ubocznych opcji* proponuję po bardzo długiej i dogłębnej analizie. Moim zdaniem, pasuje on do opisywanej sytuacji. A poza tym jest poprawny z językowego punktu widzenia.

Kolejna uwaga dotycząca terminologii związana jest z zasadą Pareto. Niektórzy autorzy używają tego terminu w sytuacji, gdy chodzi o wyznaczenie zwycięzcy, tak jak w poprzednim rozdziale, choć termin *Pareto rule* częściej stosowany jest w przypadku metody porządkowej. Należy te dwa warunki odróżnić. Wydaje się, że w terminie *porządkowa zasada Pareto* jest jasno sformułowane, o co chodzi, a w przypadku metody zakładającej uporządkowanie lepiej użyć, stosowanego przez niektórych, przymiotnika *słaba*, by nie było wątpliwości, o którą wersję zasady chodzi. Słowa angielskie połączone przy tym pojęciu z nazwiskiem Pareto bywają różne; czytamy o *Pareto rule*, *Pareto condition*, *Pareto principle, Pareto optimality*, *Pareto criterion*, a czasami autorzy nazywają tę własność *unanimity* (bez dodanego nazwiska). Termin *zasada Pareto* stosowany jest też w ekonomii i oznacza zupełnie co innego (inna nazwa to *zasada 80/20*).

Kenneth Arrow zainteresował się matematyką wyborczą w drugiej połowie lat czterdziestych XX wieku. Sam, niezależnie od kilku osób przed nim, zauważył paradoks Condorceta. Jak później pisał, próbował sformułować warunki



Kenneth Arrow
(zdjęcie: Linda A. Cicero / Stanford News Service)

wyborów, które mogłyby być powszechnie zaakceptowane, i nie udawało mu się znaleźć metody spełniającej je wszystkie – w efekcie wykazał twierdzenie o nieistnieniu takiej metody i zawarł je w swojej pracy doktorskiej w 1950 roku. Również w 1950 roku został opublikowany jego artykuł [2] zawierający to twierdzenie, a rok później książka [3] dokładnie omawiająca te zagadnienia. To Arrow wprowadził warunek niezależności od ubocznych opcji wraz z jego angielską nazwą. Twierdzenie podane wówczas przez Arrowa dotyczyło metod porządkowych i było podane w wersji nieznacznie różniącej się od tej, która obecnie jest najczęściej formułowana (także tej podanej wyżej). Nagrodę Banku Szwecji im. Alfreda Nobla z ekonomii Arrow otrzymał jednak przede wszystkim za inne osiągnięcia, w szczególności w zakresie ekonomicznej teorii równowagi ogólnej.

Związek ultrafiltrów z teorią pojawił się znacznie później, w pracy Kirmana i Sondermanna [11]. Autorzy piszą, że pierwsi tę obserwację uczynili (niezależnie) Don Brown i Peter C. Fishburn.

6. Metoda *n* głosów

Przyjmijmy, że 13 wyborców ustawia w pewnej kolejności czterech kandydatów, a ich preferencje wyglądają następująco:

	3	3	3	4
1.	*A*	*A*	*C*	*D*
2.	*B*	*D*	*B*	*B*
3.	*C*	*C*	*D*	*C*
4.	*D*	*B*	*A*	*A*

Jeśli wyborcy zagłosują metodą większości, wygra *A*, który otrzyma 6 głosów. Przy głosowaniu metodą dwóch głosów zwycięzcą zostaje *B* z 10 głosami. Gdy głosowanie odbywa się metodą 3 głosów, wygrywa *C*, co najłatwiej zauważyć dzięki temu, że jako jedyny nie zajmuje u żadnego wyborcy ostatniego miejsca. Głosowanie metodą 4 głosów nie przyniosłoby żadnego ciekawego rezultatu, gdyż wszyscy kandydaci otrzymaliby równe liczby (dlatego przy metodzie n głosów zakładamy, że $n < \#K$). Można jednak obliczyć punkty Bordy – wtedy wygra *D* z 21 punktami.

Jak się okazuje, powyższy przykład można uogólnić. Wykazał to w 1992 roku Donald Saari[14].

Twierdzenie (Saariego)**.** *Jeśli* $K = \{A_1, \ldots, A_n\}$*, to dla* $n \geqslant 3$ *istnieje model, w którym w głosowaniu metodą k głosów wygrywa kandydat* A_k *dla* $k = 1, 2, \ldots, n-1$*, natomiast w głosowaniu metodą punktów Bordy wygrywa* A_n*.*

Oryginalny dowód twierdzenia (zob. [17]) jest dość długi, oparty na zaawansowanej, skonstruowanej w tym celu teorii geometrycznej. Można jednak to twierdzenie wykazać zupełnie elementarnie (zob. [4]).

Poświęćmy też trochę uwagi słabej metodzie n głosów. W wyborach do Senatu RP jeszcze niedawno obowiązywały okręgi dwumandatowe. Załóżmy, że w takim okręgu startowali Abacki, Babacki i Żabacki, a preferencje wyborców, ustawiających kandydatów według swoich kolejności, wyglądały następująco:

	30%	30%	20%	20%
1.	*Ż*	*Ż*	*A*	*B*
2.	*A*	*B*	*B*	*A*
3.	*B*	*A*	*Ż*	*Ż*

Nie ulega wątpliwości, że wybory powinien wygrać Żabacki, który przez ponad połowę wyborców postawiony jest na pierwszym miejscu. Wyborcy głosują jednak na dwóch kandydatów i do obsadzenia są dwa miejsca. Zostaną wybrani Abacki i Babacki. Na każdego z nich zagłosuje 70% wyborców, a na Żabackiego jedynie 60%.

[14] Donald Saari (ur. 1940), amerykański matematyk.

Wybory słabą metodą n głosów są często spotykane w środowisku akademickim. Zazwyczaj w ten sposób wybierani są przedstawiciele studentów czy niesamodzielnych pracowników naukowo-dydaktycznych do rad wydziałów czy rad instytutów. Jak się okazuje, przykład z wyborów dwumandatowych można uogólnić (zob. [5]).

Twierdzenie. *Jeśli* $\#K \geqslant 2n+1$ *i* $\{A_1, \ldots, A_{2n+1}\} \subset K$, *to dla odpowiednio dużej liczby* $\#W$ *można preferencje wyborców ustawić w takim porządku, że przy głosowaniu słabą metodą n głosów zwycięzcami zostaną* $\{A_1, \ldots, A_n\}$, *natomiast przy głosowaniu słabą metodą* $n+1$ *głosów zwycięzcami zostaną* $\{A_{n+1}, \ldots, A_{2n+1}\}$; *ponadto w obu przypadkach każdy zwycięzca będzie miał poparcie ponad 50% wyborców.*

Jak widać, przy takich wyborach, jak wybory przedstawicieli studentów w ciałach kolegialnych bardzo istotną może być liczba wybieranych osób.

7. Metody tak/nie i siła głosu

Kolejna metoda jest często stosowana w praktyce. Metoda głosowania nazywa się *metodą tak/nie*, gdy każdy wyborca głosuje albo „tak", albo „nie", a końcowym wynikiem jest też albo „tak", albo „nie", przy czym jeśli wszyscy wyborcy głosują „nie", to końcowym wynikiem jest „nie", a gdy wszyscy głosują „tak" – to końcowym wynikiem jest „tak". Zbiór kandydatów jest w tym przypadku dwuelementowy, ale z każdym wyborców związana jest waga jego głosu i wagi te mogą nie być równe. Formalnie, rozważamy $f\colon \Sigma \to \{\text{tak}, \text{nie}\}$, przy czym $\Sigma = \{M : W \to \{\text{tak}, \text{nie}\}\}$, i jeśli M_0 jest funkcją stałą przyjmującą wartość „tak", to $f(M_0) = \text{tak}$, a jeśli M_1 jest funkcją stałą przyjmującą wartość „nie", to $f(M_1) = \text{nie}$.

Zbiór $A \subset W$ nazwiemy *koalicją wygrywającą*, jeśli z tego, że wszyscy wyborcy z A głosują „tak", a pozostali głosują „nie", wynika, że końcowym wynikiem jest „tak". Metoda „tak/nie" jest *monotoniczna*, gdy nadzbiór dowolnej koalicji wygrywającej jest koalicją wygrywającą.

Ze względu na to, że wagi głosów mogą być różne, analizy siły głosów przynoszą interesujące efekty. Dwie najpopularniejsze metody liczenia siły głosów co prawda różnią się od siebie, ale ich rezultaty są podobne.

Zacznijmy od indeksu Banzhaffa–Penrose'a, częściej nazywanego indeksem Banzhaffa[15], choć to Penrose[16] wprowadził go wcześniej (w 1946 roku),

[15] John Francis Banzhaf III (ur. 1940), amerykański prawnik.

[16] Lionel Penrose, (1898–1972), angielski lekarz i matematyk, członek Royal Society, ojciec fizyka Rogera Penrose'a.

a Banzhaff niezależnie w 1955 roku; jeszcze później, w 1971 roku, też niezależnie, zdefiniował go Coleman[17]. Wyborcę $w \in A$, przy czym A jest koalicją wygrywającą, nazywamy *wyborcą decydującym* dla A, jeśli $A \setminus \{w\}$ nie jest koalicją wygrywającą. *Wskaźnikiem Banzhaffa–Penrose'a* $W_B(w)$ wyborcy w nazywamy liczbę koalicji, dla których w jest wyborcą decydującym. *Indeks Banzhaffa–Penrose'a* wyborcy w_i to iloraz $\frac{W_B(w_i)}{W_B(w_1)+\cdots+W_B(w_n)}$, przy czym $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$.

Rozważmy prosty przykład. Niech zbiór $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ będzie trójelementowy, waga głosu wyborcy w_1 to 50, wyborcy w_2 to 45, a wyborcy w_3 to 1. Ustalono, że do zaakceptowania wniosku potrzebne jest 51 punktów. Koalicje wygrywające to $\{w_1, w_2\}$ (95 punktów), $\{w_1, w_3\}$ (51 punktów) oraz $\{w_1, w_2, w_3\}$ (96 punktów). Wyborca w_1 jest decydującym dla wszystkich trzech koalicji, w_2 dla pierwszej, a w_3 dla drugiej. W efekcie $I_B(w_1) = \frac{3}{5}$, $I_B(w_2) = \frac{1}{5}$, $I_B(w_1) = \frac{1}{5}$. Mimo że głos w_2 ma wagę 45 razy większą od głosu w_3, w praktyce ich głosy są warte tyle samo.

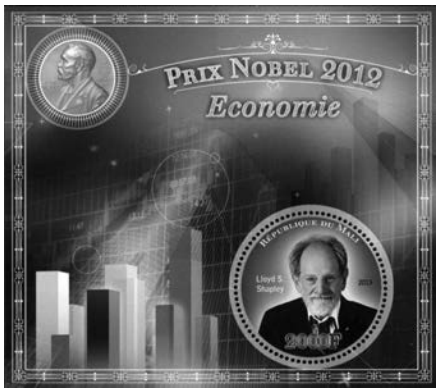
W sytuacji, gdy do akceptacji wniosku potrzebna jest odpowiednia liczba, a głosy wyborców mają wagi, stosuje się zapis $W(p; k_1, \ldots, k_n)$, w którym p oznacza liczbę potrzebną do akceptacji wniosku, a k_i wagi głosów poszczególnych wyborców.

Obliczenie indeksu Banzhaffa–Penrose'a może wydawać się skomplikowane, gdyż trzeba obliczyć wskaźniki wszystkich wyborców. Istnieje jednak stosunkowo prosty algorytm służący do tego celu w przypadku metod monotonicznych. Należy utworzyć tabelę, w której wierszom odpowiadają koalicje wygrywające, a kolumnom – wyborcy. W tabeli wypisuje się znak „+", jeśli wyborca należy do odpowiedniej koalicji, a znak „–", jeśli do niej nie należy. Różnica między liczbą plusów a liczbą minusów to wskaźnik Banzhaffa–Penrose'a. Dowód tego nie jest trudny, należy rozważyć – ze względu na wyborcę w – trzy rodzaje koalicji wygrywających: takie, do których w nie należy, utworzone z tych poprzednich przez dołączenie w oraz pozostałe.

Tabela 1. Algorytm obliczania indeksu Banzhaffa–Penrose'a

	w_1	w_2	w_3
$\{w_1, w_2\}$	+	+	−
$\{w_1, w_3\}$	+	−	+
$\{w_1, w_2, w_3\}$	+	+	+

[17] John Samuel Coleman (1926–1995), amerykański socjolog.



Znaczek z Shapleyem wydany w Mali
(choć nie przez oficjalną pocztę tego kraju) w 2013 roku,
pochodzący z serii z noblistami

Badanie indeksów Banzhaffa–Penrose'a może przynieść rozmaite interesujące efekty. Oto przykład. Jeśli obliczymy $W(15; 9, 7, 5, 3, 1)$, to okaże się, że siła głosu każdego wyborcy jest równa wadze jego głosu. Wystarczy jednak zmienić próg potrzebny do akceptacji wniosku, by istotnie zmienić role wyborców. W modelu $W(13; 9, 7, 5, 3, 1)$ wskaźniki Banzhaffa–Penrose'a wynoszą odpowiednio 10, 6, 6, 2, 2 – mimo różnych wag głosów, siła głosu wyborcy drugiego jest taka sama, jak trzeciego, a czwartego taka sama, jak piątego.

Druga metoda to indeks Shapleya–Shubika – ten został zdefiniowany wspólnie przez Shapleya[18] i Shubika[19] w 1954 roku. Tu rozważamy wszystkie n-wyrazowe ciągi utworzone z wyborców z n-elementowego zbioru W. Wyborcę w_{i_k} nazwiemy *wyborcą wpływającym* dla ciągu $(w_{i_1}, \ldots, w_{i_k}, \ldots, w_{i_n})$, jeśli zbiór $\{(w_{i_1}, \ldots, w_{i_{k-1}}\}$ nie tworzy koalicji wygrywającej, ale $\{(w_{i_1}, \ldots, w_{i_k}\}$ już ją tworzy. Liczba ciągów, dla których wyborca w jest wpływający, to wskaźnik Shapleya–Shubika, a indeks Shapleya–Shubika to wskaźnik podzielony przez $n!$, czyli liczbę wszystkich możliwych uporządkowań zbioru wyborców. W przypadku pierwszego przykładu indeksy te wynoszą $\frac{4}{6}$, $\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{6}$.

Jeśli mowa o sile głosu, warto wspomnieć o tzw. *Kompromisie Jagiellońskim*, zaproponowanym kilkanaście lat temu przez Wojciecha Słomczyńskiego[20]

[18] Lloyd Stowell Shapley (1923–2016), amerykański matematyk, laureat Nagrody Banku Szwecji im. Alfreda Nobla z ekonomii w 2012 roku. Informację o przyznaniu mu tej nagrody skomentował: „Jestem matematykiem, a nagroda jest za osiągnięcia w ekonomii. Ja nigdy, przez całe moje życie, nie uczęszczałem na żaden wykład z ekonomii."

[19] Martin Shubik (1926–2018), amerykański ekonomista.

[20] Wojciech Słomczyński (ur. 1962), polski matematyk.

i Karola Życzkowskiego[21]. Chodziło o znalezienie metody, w której siła głosu państwa członkowskiego Unii Europejskiej byłaby odpowiednio związana z liczebnością danego kraju. Zaproponowany próg, przy którym wniosek miał uzyskiwać poparcie, wynosił $\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{N_1+\cdots+N_k}}{\sqrt{N_1}+\cdots+\sqrt{N_k}}\right)$, przy czym k oznaczało liczbę krajów w Unii, a N_i liczby mieszkańców odpowiednich krajów. System był bardzo przejrzysty i – jak wykazali autorzy – z wielu względów optymalny, nie został jednak zaakceptowany. O szczegółach można przeczytać w książce [15].

8. Metody rozdziału

Jak obecnie wybierani są w Polsce posłowie na Sejm? W okręgu wyborczym, w którym do rozdziału jest n mandatów, liczby głosów uzyskane przez partie startujące w wyborach dzieli się przez kolejne dodatnie liczby naturalne. Spośród uzyskanych ilorazów wybiera się n największych. Partia, której przypadło k z tych ilorazów, dostaje k mandatów.

Zobaczmy to na przykładzie. Używam fikcyjnych nazw partii, by uniknąć zarzutu faworyzowania niektórych istniejących partii. Załóżmy, że do rozdziału jest pięć mandatów. Gwiazdką zostały oznaczone ilorazy dające mandaty.

Tabela 2. Przykład rozdziału mandatów według metody Jeffersona

	Głosów	: 1	: 2	: 3	: 4	Liczba mandatów
Rybacy	6000	∗6000	∗3000	∗2000	1500	3
Myśliwi	5700	∗5700	∗2850	1900		2
Artyści	1950	1950	975			–

Wyobraźmy sobie teraz, że w efekcie przedwyborczego badania opinii publicznej Rybacy dowiedzieli się, że poparcie ich partii jest zbliżone do poparcia dla Myśliwych i zdecydowali poprowadzić ostrą kampanię negatywną przeciwko Myśliwym („Nie głosujcie na Myśliwych! Oni są okropni! Zwierzątka zabijają!"). Kampania odniosła skutek – aż 600 osób zrezygnowało z głosowania na Myśliwych. Nie wszyscy jednak przerzucili swe głosy na Rybaków – zrobiła to co prawda większość, bo dwie trzecie, ale pozostali zagłosowali na Artystów („Ci Rybacy mają rację... Myśliwi zabijają zwierzątka... Ale przecież ryby to też zwierzątka! Wobec tego ja głosuję na Artystów"). Jak taka zmiana wpłynie na przydział mandatów?

[21] Karol Życzkowski (ur. 1960), polski fizyk.

Jeśli podział ma być sensowny (używana jest nazwa „ordynacja proporcjonalna"), to w efekcie tego, że głosy stracili Myśliwi, a najwięcej zyskali Rybacy, można dopuścić jedynie dwie możliwości – albo nic się nie zmieni, albo Myśliwi coś stracą, w pierwszym rzędzie na rzecz Rybaków. Tymczasem efekt kampanii Rybaków pokazuje poniższa tabela.

Tabela 3. Przykład rozdziału mandatów według metody Jeffersona po zmianie preferencji przez część wyborców

	Głosów	: 1	: 2	: 3	: 4	Liczba mandatów
Rybacy	6400	∗6400	∗3200	2133	1600	2
Myśliwi	5100	∗5100	∗2550	1700		2
Artyści	2150	∗2150	1075			1

Rybacy nie tylko zyskali głosy, ale zyskali więcej niż ktokolwiek inny i... stracili mandat. Sprzeczne ze zdrowym rozsądkiem, ale możliwe.

Ta metoda działa według prostego mechanizmu. Matematyka jednak zainteresuje, jakie są matematyczne przyczyny takiego schematu rozdziału.

Zostawmy na boku wybory do Sejmu. Wielokrotnie zdarza się, że trzeba rozdzielić pewne niepodzielne jednostki na podstawie wkładów, wyrażonych w znacznie większych liczbach. Wkłady te to mogą być liczby mieszkańców w danym mieście czy rejonie, wpłacone pieniądze – jednak dobra do rozdziału (identyczne) wyrażone są w liczbach całkowitych, mniejszych od wkładów nawet o kilka rzędów wielkości. Trzeba, na przykład, rozdzielić kilkanaście komputerów między kilka szkół w zależności od liczby uczniów. Kilkoro dzieci nazbierało całą masę kasztanów dla przedszkolaków (każde zbierało niezależnie) i pani przedszkolanka chce im dać za to kilkanaście voucherów na bilety do kina.

Najpierw ustalmy terminologię. Załóżmy, że dana jest pewna liczba *akcjonariuszy* s, między których należy rozdzielić pewną liczbę *akcji* m. Wkłady akcjonariuszy to $p_1, \ldots, p_s$, a otrzymane przez nich liczby akcji to $a_1, \ldots, a_s$. *Metoda rodziału* to sposób rozdzielenia akcji między akcjonariuszy. Formalnie, jest to funkcja

$$(s, m, (p_1, \ldots, p_s)) \mapsto (a_1, \ldots, a_s),$$

przy czym $a_1 + \cdots + a_s = m$.

Zdefiniujmy p jako sumę wszystkich wkładów, czyli $p = p_1 + \cdots + p_s$. Liczbę $q_i = \frac{m \cdot p_i}{p}$ nazywamy *quotą*[22] akcjonariusza i. Quota to po prostu to, co

[22] Czasami polscy autorzy piszą „kwota". Nie jest to właściwe. Słowo „kwota" po polsku

dany akcjonariusz powinien uzyskać w efekcie rozdziału; szkopuł w tym, że rozdzielić mamy akcje wyrażone w liczbach całkowitych, a quoty zazwyczaj nie są całkowite. Część całkowitą (podłogę) $\lfloor q_i \rfloor$ quoty q_i nazywamy *dolną quotą*, a jej sufit $\lceil q_i \rceil$ – *górną quotą*.

Sformułujemy teraz cztery warunki. W przypadku każdego z nich wyraźnie widać, że jeśli metoda rozdziału go nie spełnia, to pozostawia wiele do życzenia.

Warunek quoty mówi, że $\lfloor q_i \rfloor \leqslant a_i \leqslant \lceil q_i \rceil$ dla każdego akcjonariusza i. Innymi słowy, akcjonariusz nie może dostać więcej akcji, niż wynosi jego górna quota, ani mniej, niż wynosi jego dolna quota. Wynika stąd w szczególności, że jeśli quota jest liczbą całkowitą, to akcjonariusz ma otrzymać dokładnie quotę.

Warunek monotoniczności mówi, że jeśli $p_i > p_j$, to $a_i \geqslant a_j$. Oznacza to, że jeśli wkład akcjonariusza i jest większy niż wkład akcjonariusza j, to akcjonariusz i może dostać akcji albo więcej niż akcjonariusz j, albo tyle samo, ale na pewno nie mniej.

Warunek populacji jest najbardziej skomplikowany. Załóżmy, że s i m są ustalone, natomiast wkłady ulegają zmianom (na przykład rolę akcjonariuszy pełnią kraje, ich populacje się zmieniły i należy dokonać nowego podziału). Przyjmijmy, że w jednym podziale wkłady p_i wyznaczają akcje a_i, a w drugim wkłady $\overline{p_i}$ wyznaczają akcje $\overline{a_i}$. Warunek populacji mówi, że nie może się zdarzyć, że dla pewnych k, j zachodzą związki $\overline{p_k} > p_k$, $\overline{a_k} < a_k$ oraz $\overline{p_j} < p_j$, $\overline{a_j} > a_j$. Innymi słowy, nie może się zdarzyć, że wkład jednego akcjonariusza się zwiększy, a liczba przyznanych mu akcji zmniejszy, a z drugiej strony wkład innego akcjonariusza się zmniejszy, ale liczba przyznanych mu akcji zwiększy. Oczywiście może się zdarzyć, że mimo zwiększonego wkładu liczba akcji dla któregoś akcjonariusza się zmniejszy, ale to dlatego, że pewni inni akcjonariusze zwiększyli swoje wkłady bardziej znacząco.

Warunek monotoniczności akcji mówi, że jeśli zwiększymy liczbę rozdzielanych akcji z m do $\overline{m}$ (liczba akcjonariuszy i ich wkłady się nie zmieniają), to każdy akcjonariusz dostanie albo tyle samo akcji, co poprzednio, albo więcej. Inaczej, jeśli $\overline{m} > m$, to $\overline{a_i} \geqslant a_i$ dla każdego i.

Myliłby się ten, kto by sądził, że metody rozdziału zostały wprowadzone ze względu na potrzebę podziału mandatów w parlamentach między rozmaite

---

oznacza zupełnie co innego (angielskie tłumaczenie słowa „kwota" to „sum" lub „amount"). W różnych przypadkach używa się w języku polskim słów zapisywanych zgodnie z pisownią obcego języka, na przykład *weekend* (nie „łykend"), *voucher* (nie „wołczer"), *sensu stricto* (nie „sensu strikto"), *status quo* (nie „status kwo") – zwłaszcza ten ostatni przykład dobrze nawiązuje do opisywanej sytuacji. Język polski dopuszcza użycie litery „q", także na początku słowa, na przykład przy używanych przez matematyków terminach zaczynających się od *quasi* (zob. [7]).

partie. Mają one źródło w historii Stanów Zjednoczonych Ameryki Północnej. Państwo to powstało pod koniec XVIII wieku jako federacja stanów, w kształcie dalekim od obecnego. Do USA dołączały kolejne stany – zaczęło się od trzynastu stanów, dziś jest ich pięćdziesiąt. Władzę ustawodawczą sprawuje Izba Reprezentantów i Senat, a zgodnie z Konstytucją Stanów Zjednoczonych, w Izbie Reprezentantów liczba deputowanych z każdego stanu zależy od liczby mieszkańców tego stanu. Tych deputowanych wybiera się już w poszczególnych stanach, w okręgach jednomandatowych (nie wszędzie identycznie). Tak liczby członków Izby Reprezentantów, jak i metody rozdziału miejsc dla stanów przez lata się zmieniały i były ustalane rozmaitymi sposobami... Historia tych zmian sama w sobie jest pasjonująca.

Teraz wróćmy do metody, według której rozdzielane są mandaty do polskiego Sejmu, nazywanej w Polsce (i nie tylko) *metodą d'Hondta*[23]. Zgodnie z zasadą Arnolda[24] (*jeśli jakieś pojęcie jest związane z czyimś nazwiskiem, to nie jest ono nazwiskiem odkrywcy*, zob. [1]) znana i stosowana była ona dużo wcześniej, nawet przed narodzinami d'Hondta. Tu będziemy używać nazwy używanej w USA, czyli *metoda Jeffersona*[25]. Jakie jest uzasadnienie dzielenia wkładów przez kolejne liczby naturalne? Jeśli rozdzielamy m akcji między akcjonariuszy o łącznym wkładzie p, to wartość jednej akcji wynosi $w = \frac{p}{m}$, a sprawiedliwy przydział dla akcjonariusza to quota wynosząca $\frac{m \cdot p_i}{p} = \frac{p_i}{w}$. Możemy jednak rozdawać jedynie liczby całkowite akcji. Gdybyśmy przyznali każdemu akcjonariuszowi to, co mu się bezdyskusyjnie należy, czyli dolną quotę, to niemal na pewno rozdzielimy za mało akcji. Zamiast prawdziwej wartości akcji przyjmijmy inną, mniejszą, nazwijmy ją *wartością umowną akcji*, oznaczmy przez v i rozważajmy quoty umowne $\widetilde{q}_i$ równe $\frac{p_i}{v}$. Quota umowna jest większa od quoty, podobnie dolna quota – zmniejszamy wartość umowną akcji do momentu, w którym suma akcji otrzymana jako suma dolnych quot umownych wyniesie m. Można wykazać, że ten mechanizm jest równoważny z przyznawaniem akcji w rezultacie dzielenia wkładów przez kolejne liczby naturalne.

---

[23] Victor d'Hondt (1841–1902), belgijski prawnik. Metodę nazywaną w Europie metodą d'Hondta zaproponował w 1878 roku.

[24] Władimir Igoriewicz Arnold (1937–2010), rosyjski matematyk.

[25] Thomas Jefferson (1743–1826), amerykański polityk i prawnik, jeden z ojców założycieli Stanów Zjednoczonych, w latach 1801–1809 prezydent USA. Metodę nazwaną metodą Jeffersona zaproponował w 1792 roku (był wówczas sekretarzem stanu), dziesięć dni po tym, gdy prezydent Washington zawetował użycie metody Hamiltona, uznając ją za niezgodną z konstytucją. Notabene było to pierwsze weto prezydenckie w historii USA.

Można zamiast quot dolnych rozważać quoty górne. Wtedy, by odpowiednie sumy w pewnym momencie dały liczbę akcji do rozdziału, trzeba wartość umowną akcji zmniejszać. Ta metoda nosi nazwę *metody Adamsa*[26].

Można czynić jeszcze inaczej – przybliżać quotę do najbliższej liczby całkowitej – tu może się zdarzyć, że odpowiednie sumy już od razu dadzą żądaną sumę akcji. Jeśli tak się nie stanie, to – jak poprzednio – wprowadzamy wartości umowne, które odpowiednio zmniejszamy lub zwiększamy do momentu otrzymania założonej sumy. Ta metoda jest nazwana imieniem Webstera[27], a w Europie nazywana jest *metodą Sainte-Laguë*[28]. W tym przypadku też istnieje prosty algorytm znajdywania liczby mandatów, podobny do stosowanego w metodzie Jeffersona – dzielimy wkłady przez kolejne liczby nieparzyste.

Zauważmy, że przybliżenie do liczby całkowitej w metodzie Webstera polega na tym, że jeśli quota danego akcjonariusza jest mniejsza od średniej arytmetycznej quoty górnej i quoty dolnej, to przybliżamy ją do quoty dolnej, a jeśli większa – to do quoty górnej. Ale przecież istnieją inne średnie. Jeśli zamiast średniej arytmetycznej rozważać będziemy średnią geometryczną, to otrzymamy *metodę Hilla*[29] (czasami nazywaną metodą Huntingtona–Hilla[30]), a jeśli średnią harmoniczną – *metodę Deana*[31].

Można rozdzielać akcje według zupełnie innego schematu. Najpierw przyjmijmy, że – tak jak w metodzie Jeffersona – każdy akcjonariusz powinien dostać co najmniej dolną quotę. Wówczas te części wkładów, za które akcjonariusze dostali akcje, zostały już wykorzystane. Są jednak jeszcze kolejne akcje do rozdzielenia. Przyznawane są (po jednej) tym akcjonariuszom, którym pozostały największe jeszcze nie wykorzystane części wkładów. Ta metoda nosi nazwę

---

[26] John Quincy Adams (1767–1848), amerykański polityk i prawnik, syn prezydenta USA w latach 1797–1801 Johna Adamsa (1735–1826), w latach 1825–1829 prezydent USA. Metodę nazwaną metodą Adamsa zaproponował w 1790 roku, jednak nigdy nie była ona stosowana przy ustalaniu składu Izby Reprezentantów.

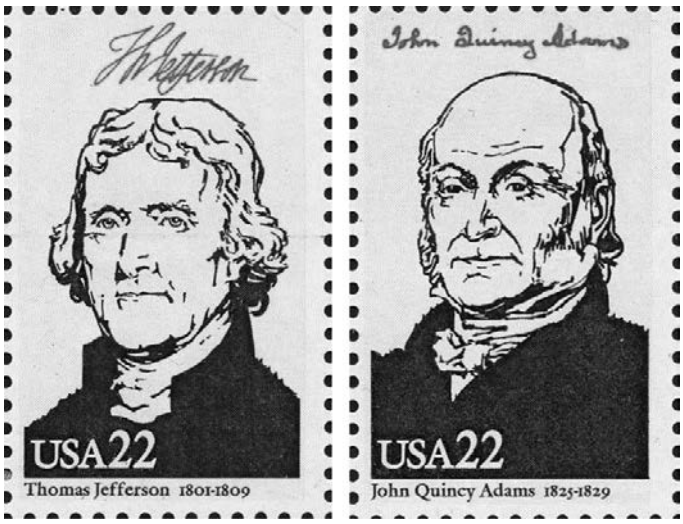
[27] Daniel Webster (1782–1852), amerykański prawnik i polityk. Metodę nazwaną metodą Webstera zaproponował w 1832 roku.

[28] André Sainte-Laguë (1882–1950), francuski matematyk. Metodę nazywaną w Europie metodą Sainte-Laguë zaproponował w 1910 roku.

[29] Joseph Adna Hill (1860–1938), amerykański statystyk, od 1909 główny statystyk United States Census Bureau (USCB). W latach dwudziestych XX wieku zaproponował kolejną metodę rozdziału.

[30] Edward Vermilye Huntington (1874–1952), amerykański matematyk, szkolny kolega Hilla. W latach dwudziestych XX wieku skorygował metodę zaproponowaną pierwotnie przez Hilla i podał jej interpretację za pomocą średnich geometrycznych; propozycja Hilla była sformułowana inaczej.

[31] James Dean (1776–1849), amerykański astronom i matematyk. Metodę nazwaną metodą Deana zaproponował w 1832 roku.



Dwa znaczki (przedstawiające T. Jeffersona i J. Q. Adamsa) z bloku zawierającego podobizny pierwszych dziewięciu prezydentów USA, wydanego w USA w 1986 roku

metody Hamiltona[32] albo *metody największych reszt*. Właśnie tą metodą rozdzielane były mandaty w wyborach do Sejmu RP w 1991 roku. Wydawałoby się, że jest ona naturalna, prosta i w miarę logiczna. Tymczasem i ona prowadzi do zaskakujących efektów. Są z nią związane dwa słynne paradoksy – Alabamy i Oklahomy.

Wyobraźmy sobie, że panie Aspazja, Bespazja i Cespazja złożyły się i kupiły sobie woreczek z perłami. Aspazja zapłaciła 145 złotych, Bespazja 340 złotych, Cespazja 515 złotych. W woreczku było dziesięć pereł, a panie rozdzieliły je metodą Hamiltona, jak pokazuje poniższa tabela.

Tabela 4. Przykład ilustrujący paradoks Alabamy – część pierwsza

	Wkład	Quota	Dolna quota	Reszta	Liczba pereł
A	145	1,45	1	0,45	2
B	340	3,40	3	0,40	3
C	515	5,15	5	0,15	5

Po dodaniu dolnych quot wychodzi liczba dziewięć, największą resztę miała Aspazja, jej zatem przypadła dziesiąta perła. Perły zostały rozdzielone,

[32] Alexander Hamilton (1755 lub 1757–1804), amerykański polityk, prawnik i ekonomista, jeden z ojców założycieli Stanów Zjednoczonych, twórca dolara amerykańskiego.



Banknoty: dwudolarowy i dziesięciodolarowy z podobiznami Jeffersona i Hamiltona

Bespazja i Cespazja poszły do kuchni zrobić herbatę, a Aspazja zaczęła oglądać woreczek. I znalazła jedenastą perłę! Gdybyśmy podzielili perły według użytej wcześniej metody, podział wyglądałby tak (teraz wartość perły to $\frac{1000}{11}$).

Tabela 5. Przykład ilustrujący paradoks Alabamy – część druga

	Wkład	Quota	Dolna quota	Reszta	Liczba pereł
A	145	1,59	1	0,59	1
B	340	3,74	3	0,64	4
C	515	5,66	5	0,66	6

Ponownie suma dolnych quot wynosi 9, ale dwie największe reszty to 0,74 i 0,66, dające po perle Bespazji i Cespazji. I teraz można zadać pytanie, co powinna zrobić Aspazja? Schować jedenastą perłę do kieszeni czy powiedzieć koleżankom: „słuchajcie, znalazłam kolejną perłę, wobec tego obie dostaniecie po jednej perle więcej, a ja jedną perłę mniej?"

Metoda Hamiltona nie spełnia warunku monotoniczności akcji.

Opisane zjawisko nazwane zostało *paradoksem Alabamy*. Około 1880 roku w Kongresie Stanów Zjednoczonych zastanawiano się nad tym, czy przy doborze reprezentacji stanów w Izbie Reprezentantów stosować metodę Hamiltona czy Webstera oraz nad liczebnością Izby Reprezentantów. Charles W. Seaton,

dyrektor USCB, dokonał symulacji rozdziału miejsc w obu metodach w przypadkach od 275 do 350 członków Izby Reprezentantów. Okazało się, że przy 299 miejscach przydzielanych według metody Hamiltona stan Alabama ma ośmiu przedstawicieli, a przy 300 jedynie siedmiu. Zdecydowano się wówczas na liczbę 325. Metody nie wyznaczono konkretnie, gdyż przy tej liczbie obie dały te same wyniki.

Podobna sytuacja miała miejsce w 1901 roku. Ponownie ustalano liczbę miejsc w Izbie Reprezentantów, dokonując symulacji wyników w metodzie Hamiltona dla liczb od 350 do 400. Okazało się, że stan Colorado otrzymałby trzy miejsca z jednym wyjątkiem – liczby 357. Z kolei stan Maine otrzymywał cztery miejsca w przypadkach: 383–385, 387–388, 391–400, w pozostałych zaś trzy miejsca. Albert Hopkins z Illinois, członek Izby Reprezentantów, który żywił zdecydowaną niechęć do stanu Colorado, zaproponował stosowanie metody Hamiltona dla właśnie 357 przedstawicieli. Nie spodobało się to zdecydowanie przedstawicielom stanu Maine, a John Littlefield reprezentujący Maine wygłosił na posiedzeniu Izby płomienne przemówienie, mówiąc: „niech Bóg ma w swej opiece stan Maine, gdy się do niego dobierają matematycy".

Kolej na *paradoks Oklahomy*. Wyobraźmy sobie, że do rozdziału jest dziesięć akcji, a wkłady to 145, 340, 515 (czyli dokładnie tak samo, jak w przypadku trzech pań i pereł). Wartość jednej akcji to 100. Przydziały akcji dla akcjonariuszy A, B i C to dwa, trzy oraz pięć. Okazuje się teraz, że pojawia się kolejny akcjonariusz, wnosi wkład 260, w związku z czym należy rozdzielić trzynaście akcji. Jak wygląda sytuacja?

Tabela 6. Przykład ilustrujący paradoks Oklahomy

	Wkład	Quota	Dolna quota	Reszta	Liczba akcji
A	145	1,496	1	0,496	1
B	340	3,508	3	0,508	4
C	515	5,313	5	0,313	5
D	260	2,682	2	0,682	3

Akcjonariusz D dołożył wkład w wysokości 260 i otrzymał, jak się można było spodziewać, trzy akcje. Zaszło jednak oryginalne zjawisko: dołączenie akcjonariusza D zmieniło przydział akcji u pozostałych; na podstawie dolnych quot rozdzielono jedenaście akcji, a dwie przyznano – w oparciu o reszty – akcjonariuszom D i B. Dodanie akcjonariusza D spowodowało stratę akcji przez A i zysk dla B. Dlaczego ten paradoks nosi nazwę paradoksu Oklahomy? Otóż

w 1907 roku stan Oklahoma został włączony do USA. Liczba stanów zwiększyła się do 46, populacja Oklahomy została oszacowana na milion, zgodnie z czym Oklahomie powinno przypadać w Izbie Reprezentantów pięć miejsc. Dokonano nowego podziału, Oklahomie istotnie przypadło pięć miejsc, ale stan Nowy Jork stracił jedno miejsce na rzecz stanu Maine (znowu Maine!). Wtedy ostatecznie zrezygnowano z ustalania składu Izby Reprezentantów metodą Hamiltona.

Dodajmy, że najpierw przy podziale miejsc w Izbie Reprezentantów stosowano metodę Jeffersona, potem wymiennie metody Hamiltona i Webstera, a od 1941 roku obowiązuje metoda Hilla[33].

Te metody rozdziału nazywane są często *proporcjonalnymi*. Definicja proporcjonalności podawana jest w szkole. Dla każdej z takich metod można bez trudu skonstruować modele, pokazujące, że mają one mało wspólnego z prawdziwą proporcjonalnością.

Podobnie jak w przypadku metod zwycięzcy i metod zakładających uporządkowanie, okazuje się, że dobrej metody rozdziału nie ma. W 1982 roku Balinski[34] i Young[35] wykazali fundamentalne twierdzenie o metodach rozdziału.

Twierdzenie (Balinskiego–Younga)**.** *Jeśli liczba akcjonariuszy jest większa niż trzy, a liczba miejsc większa niż sześć, to nie istnieje metoda rozdziału spełniająca jednocześnie warunki quoty, monotoniczności i populacji.*

Co ciekawe, zanim Balinski i Young wykazali to twierdzenie, zaproponowali (w 1975 roku) pewną ciekawą metodę rozdziału. Oparta ona była na konstrukcji rekurencyjnej ze względu na liczbę wszystkich akcji do rozdzielenia i spełniała warunki quoty, monotoniczności i monotoniczności akcji.

9. Jeden spośród wielu

Istotną cechą metody rozdziału jest, że przydziela ona akcjonariuszom identyczne akcje. Jednakże stosowanie jej do rozdzielania mandatów w parlamencie związane jest z jeszcze innymi efektami. Rozważmy przykład. Należy rozdysponować sześć mandatów.

[33] Na rzecz wprowadzenia tej metody bardzo mocno działał Huntington, a jednym z argumentów okazało się wsparcie wybitnych matematyków, w tym Johna von Neumanna (1903–1957) i Marstona Morse'a (1892–1977).

[34] Michel Louis Balinski (1933–2019), francusko-amerykański matematyk polskiego pochodzenia. Wnuk bakteriologa Ludwika Rajchmana (1881–1965), założyciela UNICEF.

[35] Hobart Peyton Young (ur. 1945), amerykański matematyk i ekonomista.

Tabela 7. Przykład ilustrujący rozdział mandatów w metodach głosowania „na listy" między konkretnych kandydatów

	Głosów	: 1	: 2	: 3	: 4	: 5	: 6
Matematycy	1200	1200	600	400	300	240	200
Politycy	201	201	101				

Pięć mandatów przypadnie matematykom, jeden politykom. Miejsca w parlamencie przypadają tym kandydatom z danej partii, którzy otrzymali najwięcej głosów, gdyż wyborca zaznacza na liście popieranej przez siebie partii jednego kandydata.

Przyjmijmy, że głosy wyborców wskazujących na konkretnych kandydatów rozłożyły się w miarę równo i w grupie matematyków Kwadrat dostał 201 głosów, Trójkąt, Stożek, Walec, Sześcian po 200, a Iloczyn 199. Podobnie było w grupie Polityków: Sejmokrata otrzymał 35 głosów, kolejny Polityk 34, a pozostali po 33. I w tej sytuacji do Sejmu wejdzie Sejmokrata, Iloczyn zaś nie, choć Iloczyn otrzymał niemal sześć razy więcej głosów niż Sejmokrata, ba! Prawie tyle samo głosów, co wszyscy Politycy razem!

Głosy jednak rzadko rozkładają się równo, zazwyczaj istnieją „lokomotywy wyborcze". Oto zatem kolejny przykład.

Załóżmy, że pewnym okręgu Matematycy otrzymali cztery mandaty po otrzymaniu 100 tysięcy głosów i do Sejmu weszli: Trójkąt (99 995 głosów), Reper (dwa głosy – swój i żony), Tensor (dwa głosy – swój i żony) oraz Koneksja (jeden głos – swój, bo mąż głosował na Trójkąt). A w Sejmie wszystkie głosy są równe i Reper wraz z Tensorem i Koneksją mogą przeforsować *Ustawę o wyższości geometrii różniczkowej nad geometrią elementarną*. Nie mówiąc już o tym, że – mimo tego, że weszli do Sejmu dzięki głosom na Trójkąt – po wyborach mogą przejść z Partii Matematyków do, na przykład, Partii Fizyków.

Oczywiście przykłady te są przerysowane, ale pokazują pewne zjawisko, które w praktyce istnieje. Stosowanie metod rozdziału może być matematycznie uzasadnione tylko wtedy, gdy przydzielane obiekty (akcje) są idealnie takie same. Posłowie na Sejm jednak są różni, czasem diametralnie, nawet reprezentujący tę samą partię... W wyborach do Sejmu w 1993 roku (okręgami były województwa w liczbie 49) prawie 150 posłów otrzymało w wyborach mniej niż 3 tysiące głosów (niekiedy znacznie mniej); rekordowy wynik należy do parlamentarzysty, który dostał w wyborach tylko 131 głosów.

Jak widać na podstawie przykładu z Puchatkiem, Królikiem itd., to, kto zostanie wybrany, może zależeć od przyjętej metody liczenia głosów. Jednak w każdym z rozważanych tam przypadków zwycięzcy mieli całkiem spore po-

parcie. W okręgach jednomandatowych osoby ze znikomym poparciem nie mają szans na wejście do parlamentu.

Warto też wspomnieć o aspekcie nie tyle matematycznym czy politycznym, a psychologiczno-socjologicznym. W wyborach do Sejmu czy rad miasta można przed wyborami przewidzieć, ile (w przybliżeniu) mandatów przypadnie danej partii; w zależności od liczby wszystkich mandatów w okręgu – może trzy, może cztery... A kandydatom oczywiście zależy na tym, by mandaty przypadły właśnie im. W okręgach jednomandatowych „walczą" z kandydatami innych partii. A w wyborach „na listy" konkurują głównie z przedstawicielami własnej partii...

Należy jeszcze dodać, że w wyborach do Sejmu RP obowiązuje tzw. próg 5% w skali kraju, co oznacza, że w podziale mandatów do Sejmu liczone są jedynie głosy oddane na partie, które *w całym kraju* ten próg przekroczyły. To jeszcze bardziej zaburza proporcjonalność. Jedną z praktycznych konsekwencji jest, że gdyby autor tego artykułu kandydował samodzielnie do Sejmu i gdyby wszyscy uprawnieni mieszkańcy Krakowa na niego głosowali (oba te zdarzenia są dokładnie tak samo prawdopodobne), to i tak – ze względu na próg wyborczy – posłem by nie został.

W matematycznej teorii wyborów rozważanych jest wiele zagadnień. W niniejszym tekście zostały przedstawione tylko wybrane z nich, można powiedzieć, że podstawowe. Kolejne można znaleźć na przykład w książkach [6,14,16,22,23]. Wiele informacji o różnych metodach wyborczych i innych zagadnieniach z wyborami związanymi opisanych jest w książkach [9,12,15,21,24]. O historii badań Arrowa, a także pewnych wcześniejszych dokonaniach dotyczących wyborczej tematyki, można przeczytać w pracy [13].

Stefan Kisielewski[36] twierdził, że nie ma poglądów politycznych, lecz ekonomiczne. W zakresie opisanej wyżej tematyki można tę opinię przeobrazić na stwierdzenie, że na problemy wyborcze warto popatrzeć nie politycznie, a matematycznie.

Bibliografia

[1] W. I. Arnold, *O nauczaniu matematyki*, Wiad. Mat. 37 (2001), 17–26.
[2] K. J. Arrow, *A difficulty in the concept of social welfare*, Journal of Political Economy 58 (1950), 328–346.
[3] K. J. Arrow, *Social choice and individual values*, John Wiley & Sons, New York 1951.
[4] K. Ciesielski, *On elementary proof of Saari's Theorem*, preprint.

[36] Stefan Kisielewski ps. *Kisiel* (1911–1991), polski kompozytor, pisarz i publicysta.

[5] K. Ciesielski, *On voting for n candidates*, preprint.
[6] N. de Condorcet, *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des decisions rendues à la pluralité des voix*, L'imprimerie Royale, Paris 1785.
[7] W. Doroszewski (red.), *Słownik poprawnej polszczyzny PWN*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1980.
[8] A. Gibbard, *Manipulation of voting schemes: a general result*, Econometrica 41 (1973), 587–601.
[9] J. Haman, *Demokracja, decyzje, wybory*, Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR, Warszawa 2003.
[10] J. K. Hodge, R. E. Klima, *The mathematics of voting and elections: a hands-on approach*, American Mathematical Society, Providence, RI 2005.
[11] A. P. Kirman, D. Sondermann, *Arrow's Theorem, many agents, and invisible dictators*, Journal of Economic Theory 5 (1972), 267–277.
[12] R. Lazarowicz, J. Przystawa (red.), *Otwarta księga. O jednomandatowe okręgi wyborcze*, Wydawnictwo SPES, Wrocław 1999.
[13] J. Lützen, *How mathematical impossibility changed welfare economics: a history of Arrow's impossibility theorem*, Historia Math. 46 (2019), 56–87.
[14] E. A. Robinson, D. H. Ullman, *A mathematical look at politics*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Racon 2011.
[15] K. Rzążewski, W. Słomczyński, K. Życzkowski, *Każdy głos się liczy! Wędrówka przez krainę wyborów*, Wydawnictwo Sejmowe, Warszawa 2014.
[16] D. G. Saari, *Chaotic elections! A mathematician looks at voting*, American Mathematical Society, Providence, RI 2001.
[17] D. G. Saari, *Millions of election rankings from a single profile*, Soc. Choice & Welfare 9 (1992), 277–306.
[18] M. A. Satterthwaite, *Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions*, Journal of Economic Theory 10 (1975), 187–217.
[19] J. Sinclair (red.), *Collins Cobuild English Dictionary*, HarperCollins, London 1995.
[20] J. Stanisławski, *Wielki słownik angielsko-polski*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1964.
[21] G. G. Szpiro, *Numbers rule: the vexing mathematics of democracy, from Plato to the present*, Princeton University Press, Oxford 2010.
[22] A. D. Taylor, A. M. Pacelli, *Mathematics and politics. Strategy, voting, power nad proof*, wyd. 2, Springer, New York 2008.
[23] A. D. Taylor, *Social choice and the mathematics of manipulation*, Cambridge University Press, Cambridge 2005.
[24] H. P. Young, *Sprawiedliwy podział*, Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR, Warszawa 2003.

Krzysztof Ciesielski
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński
Krzysztof.Ciesielski@im.uj.edu.pl

Wiad. Mat. 56 (1) 2020, 63–88
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Krzysztof Tatarkiewicz (Warszawa)

Archimedes: legendy i prawda (w świetle źródeł i zdrowego rozsądku)*

Jeśli chodzi o słuchaczy, to dzieło moje, pozbawione baśni wyda się im może mniej interesujące, lecz wystarczy mi, jeśli uznają je oni za pożyteczne...

Tukidydes, *Wojna Peloponeska* I, 22

1. Wprowadzenie

Legendy o twórcach mają często różny charakter: mogą dotyczyć ich osiągnięć, mogą też odnosić się do samych życiorysów. Do pierwszych legend należy na przykład stworzona przez Piotra Duhema legenda, że Nicole (Mikołaj) Oresme był prekursorem Mikołaja Kopernika. Ale wyjaśnienia tego rodzaju legend, na ogół, wymagają daleko idącego wprowadzenia w osiągnięcia naukowe osoby omawianej oraz stan nauki w okresie jego działalności. Dlatego też omówię w tym referacie legendę drugiego typu, a mianowicie legendę o życiu i działalności praktycznej Archimedesa.

W niemal każdej (ogólnej) encyklopedii znaleźć można taką mniej więcej wzmiankę:

* Artykuł ten ukazał się w 1996 roku w tomie 76 *Zeszytów Naukowych Politechniki Śląskiej*, wydanym w nakładzie 153 drukowanych egzemplarzy; tom ten od dawna jest praktycznie niedostępny. Autor zmarł w 2011 roku; wspomnienie o nim opublikowane jest w tomie 50 (2) *Wiadomości Matematycznych*. Redakcja dziękuje synowi Krzysztofa Tatarkiewicza, Jakubowi Tatarkiewiczowi, za zgodę na przedruk artykułu w *Wiadomościach Matematycznych*.

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Archimedes – najwybitniejszy fizyk i matematyk starożytności; twórca statyki i hydrostatyki; wynalazca techniczny. Żył i działał w Syrakuzach na Sycylii (287-212 p.n.e.).

W podręcznikach historii – nie tylko historii matematyki, ale i ogólnej „historii" – (a także w obszernych encyklopediach) do tych informacji dodaje się zwykle, że był kuzynem władców Syrakuz, że korespondował z Eratostenesem, że w czasie oblężenia Syrakuz przez Rzymian wymyślał różne wyrafinowane sposoby, by szkodzić oblegającym (lustra, którymi za pomocą promieni słonecznych podpalał okręty oblegających, dźwignie, które te okręty niszczyły, etc.) i – wreszcie – najbardziej znana historia „noli tangere ciculos meos" („zechciej nie ruszać moich okręgów") i śmierć Archimedesa.

Większość tych wiadomości – jak się okazuje – jest bałamutna. Zawsze uważałem, że nie ma co walczyć z informacjami encyklopedii i popularnych podręczników – korzystają one przecież z informacji z czwartej czy dalszej ręki. Ale te informacje o Archimedesie powtórzone są nawet w podstawowej monografii G. Sartona (patrz [29]). Wprawdzie wszystkie one zaopatrzone są klauzulą „...is said that..." („...mówi się, że..." lub może raczej „...podobno..."), ale nie jest podane, skąd te informacje pochodzą. Dlatego warto może zająć się bliżej prawdą i legendą w życiorysie Archimedesa.

Referat jest utrudniony przez to, że wprawdzie istniał starożytny życiorys Archimedesa (napisany przez jego rówieśnika lub tylko może mało co młodszego niż on – niejakiego Herakleidesa), ale niestety zaginął (acz istniał on jeszcze w VI AD).

2. Data śmierci

Zacznijmy więc od ram każdego życiorysu, to jest od dat jego urodzenia i śmierci. Z powodów, które później okażą się oczywiste, zacznijmy „od końca", to jest od daty śmierci Archimedesa.

Wszystkie starożytne źródła są zgodne, że Archimedes umarł gwałtowną śmiercią, że wówczas był już starym człowiekiem (potwierdza to, między innymi, Polibiusz), i że nastąpiło to zaraz po (czy niedługo po) zdobyciu Syrakuz przez Rzymian, którymi dowodził Marcellus (Marcus Claudius Marcellus). Sęk w tym, że nie znamy dokładnej daty zdobycia Syrakuz. Po prostu zaginęły – w znacznej części – *Dzieje* Polibiusza. Były one pisane około –150 roku[1]. W całości ocalały

[1] Stosuję zapis „z minusem", przyjmując rok zerowy, odpowiadający 1 a.Ch.n. – daje to zależność: $-n$ jest rokiem $n + 1$ a.Ch.n. Zamiast np. rok 5 AD będziemy też pisać +5 lub, po prostu, 5.

księgi 1–5, z pozostałych, w szczególności z księgi 8 opisującej oblężenie i zdobycie Syrakuz, zostały się tylko wyciągi-excerpty (patrz [27; 28, str. 370–373, 391–392]).

Wprawdzie odpowiednie księgi Liwiusza, to jest księgi 24 i 25 (który nota bene korzystał z dzieła Polibiusza, a przynajmniej dobrze je znał), zachowały się (patrz [17] lub [19], lub [20, str. 203 do 268]). Były one jednak pisane dopiero po roku 0 oraz zawierają często dość bałamutne wiadomości, ewentualnie wiadomości wewnętrznie sprzeczne lub sprzeczne z zachowanymi fragmentami Polibiusza. Nie dostarczają więc one bardziej dokładnych danych, które umożliwiłyby nam lepszą datację zdobycia Syrakuz. Dlatego też jedni historycy przyjmują rok −210 (211 a.Ch.n.). Przyjmuje tak na przykład prof. M. Jaczynowska [13, str. 100; 14, str. 97] lub prof. A. Krawczuk [16, str. 103]. Ale inni – szczególnie dawniejsi – wierzą, że nastąpiło to już w roku −211 (= 212 a.Ch.n) – patrz, na przykład, H. Dieter, R. Günter [7, str. 81] lub G. Sarton [29, str. 69], przy czym uważa on tę datę za jedyny pewny (!) element ze znanego nam życiorysu Archimesesa.

Te rozbieżności wywoływane są nie tylko niejasnością źródeł, ale też i zawikłaną sytuacją, którą opisują. Nie jest bowiem całkiem jasne, jakie godności w tym okresie piastował Marcellus. Bowiem jako pretor i były konsul był – jak się zdaje – obdarzony (wbrew prawu) władzą prokonsularną, po czym, gdy umarł ówczesny konsul-patrycjusz, został wybrany konsulem (pełnoprawnym, acz taki konsul był nazywany „suffectus" – zastępczy). Ponieważ w ten sposób obaj konsulowie byliby plebejuszami (ta gałąź rodu Klaudiuszów była plebejska), więc wybór ten unieważniono, lecz sam Marcellus wliczał go sobie do swych pięciu konsulatów (patrz [22, kol. 2738–2755][2]).

A co na ten temat mówią same źródła? We wzmiankowanym wyżej dziele Liwiusza pierwszy szturm Rzymian na Syrakuzy umieszczony jest za konsulatu Marcellusa, to jest albo w −213 roku albo w okresie marzec −213 – marzec −212. Którą z tych dwóch możliwości przyjmiemy, zależy od naszych poglądów na moment, w którym początek rzymskiego roku przeniesiono z 1 marca na 1 stycznia: w −152 roku czy też (dużo) wcześniej (patrz, na przykład, [41, str. 8]). Dla nas, jak zobaczymy niżej, jest to prawdopodobnie bez większego znaczenia, gdyż ówczesny początek roku nie wpłynie na nasze datowanie (w ekstrapolowanych latach gregoriańskich). Ale Polibiusz uważa, że początek oblężenia nastąpił, gdy Marcellus był prokonsulem, a więc w roku −212 (a może chodzi tu o preturę z władzą prokonsularną, to jest o rok −214?). Z różnych powodów bardziej jest prawdopodobne, że Polibiusz ma rację, a więc, że chodzi chyba o rok −212. Ze względu na to co przedtem i potem w tym właśnie roku się wydarzyło

[2] Dziękuję prof. dr. A. Krawczukowi za zwrócenie mi uwagi na ten tekst.

(niezależnie od tego, który to był rok), to oblężenie prawdopodobnie zaczęło się na wiosnę.

Wedle Liwiusza oblężenie zbliżało się do końca, gdy z „powodu jesiennej niepogody" (a więc na jesieni) wybuchła w Syrakuzach zaraza (patrz *Dzieje* ks. XXV, ust. 26, [20, str. 260]). Niedługo po tym, na rodzaju rady wojennej Marcellus stwierdził, że siedzi pod Syrakuzami już trzeci rok (patrz *Dzieje* ks. XXV, 31, [20, str. 268]). Ale wielu komentatorów uważa, że tu jest w tekście błąd i że miało być, iż siedzi tam (co najmniej) dwa lata. Skoro zaczął on oblężenie na wiosnę (ale nie jest to absolutnie pewne), to mogło to by być tylko albo ponad 2 1/2 roku albo ponad 3 1/2 roku (ewentualnie ponad 1 1/2 lub ponad 2 1/2 roku). Chociażby ze względu na lepsze przybliżenie 3 lat (ewentualnie 2 lat) było to raczej *ponad 2 1/2 roku* (ewentualnie *ponad 1 1/2 roku*). Działania wojenne trwały po tym jeszcze nieco: kilka tygodni lub parę miesięcy (albo nawet kilka miesięcy). A więc oblężenie skończyło się na przełomie dwóch lat (naszych, a może i ówczesnych rzymskich). Jeśli pójdziemy za Polibiuszem, to koniec oblężenia nastąpił na przełomie −210 oraz −209 roku ewentualnie rok wcześniej (ale raczej już w ciągu −210) lub (co jest mało prawdopodobne) rok później. Jeżeli będziemy wierzyć Liwiuszowi, to dostaniemy daty o rok wcześniejsze. Dlatego najprawdopodobniejszą datą jest przełom −210/−209. Nie można jednak wykluczyć pomyłki o jeszcze jeden cały rok w jedną albo drugą stronę (przełomy −209/−208 oraz −211/−210). Jeszcze większą ostrożność okazalibyśmy, nie całkiem wierząc w jesienną zarazę w Syrakuzach. Jesień jest bowiem w odpowiednim ustępie wspomniana tylko mimochodem – i może to być omyłkowa wzmianka: w okolicy Syrakuz epidemie malarii szerzyły się najczęściej w lecie. W takim razie należałoby przyjąć, że upadek Syrakuz nastąpił między połową −212 a połową −208 roku – z tym że lata −212 i −208 są bardzo mało prawdopodobne. Jest to datacja zbliżona do podanej (w obu wersjach) w podręcznikach i monografiach, niemniej jednak jest ona od nich mniej kategoryczna.

Wniosek. Koniec życia Archimedesa nastąpił zaraz po upadku Syrakuz, to jest najprawdopodobniej na przełomie lat −210 oraz −209 – nie można jednak wykluczyć błędu półtorarocznego lub nawet dwuipółrocznego.

3. Rok urodzenia

A skąd wzięła się data roczna −286 (lub spotykane też – ostrożniejsze – datowanie „około −286 roku") jako data urodzenia Archimedesa? Zwraca ona uwagę tym, że jest dziwnie dokładna, gdy tymczasem w praktyce nie znamy

prawie żadnej dokładnej daty urodzenia z czasów greckich (i późniejszych, na przykład z czasów wcześniejszej republiki rzymskiej). Są przecież nawet wątpliwości co do roku urodzenia samego Juliusza Cezara! Nie chodzi tu tylko o zaginięcie źródeł, ale też i o datowanie lat według eponimów (zarówno w Grecji, jak i w Rzymie) – i to różnych eponimów w różnych państwach czy państewkach. Na przykład założywszy, że Juliusz Cezar był urodzony za IV konsulatu C. Mariusa (to jest gdy Gajusz Mariusz był po raz czwarty konsulem) oraz konsulatu Q. Lutatiusa Catulusa („założywszy", gdyż nie można wykluczyć, że był urodzony, gdy konsulem był po raz VI C. Marius oraz L. Valerius Flaccus), jak obliczyć, ile miał lat w roku, gdy konsulami byli L. Aemilius Paullus oraz C. Claudius Marcellus? Dopiero za pomocą odpowiednich tabel („Fasces consulares") doszlibyśmy, że miał wtedy lat 52 (ewentualnie 50). Zresztą moglibyśmy mieć jeszcze i inne kłopoty – z początkiem roku rzymskiego l marca (a więc różnego od naszego i do kiedy był on stosowany?) i z dodawaniem miesięcy przestępnych (nie zawsze wiadomo, w którym roku były one dodawane).

Ale co się temu dziwić: już nawet po wprowadzeniu naszego sposobu numerowania lat bardzo długo jeszcze nie znano wieku poszczególnych osób. I to nawet członków rodzin panujących, na przykład nie znamy wieku ani Władysława Jagiełły, ani też jego licznych kuzynów. I nie jest to specyfika XIV-wiecznej Litwy, ale też całej Rusi (patrz [40]), a nawet Polski. A jeśli chodzi nie o członków dynastii, to zjawisko to występowało jeszcze później: „...Jeszcze u schyłku XVI wieku świadkowie na procesach toczonych na terenie Warszawy podają swój wiek w dużym przybliżeniu..." (patrz [4, str. 21]).

Skąd więc ta nieprawdopodobna dokładność daty rocznej urodzenia Archimedesa? Okazuje się, że opiera się ona na jednym jedynym tekście (i to bardzo podejrzanym), a mianowicie na jednym zdaniu z *Chiliad* Tzetzesa.

Kim był ów Tzetzes? I co to są *Chiliady*? Jan Tzetzes był XII-wiecznym (urodzonym około 1110 – zmarłym po 1180, a może nawet po 1186 roku) duchownym bizantyńskim, żyjącym w Konstantynopolu (patrz na przykład [23, kol. 1959–2011]). Był erudytą, gramatykiem (podobno niezłym) i poetą (chyba kiepskim). Napisał książkę historyczną, zredagowaną jako 107 listów (patrz [32][3]). A nieco później (w latach 1138–1165) jako komentarz do tych „listów" historię świata, tak zwanym „wierszem politycznym"[4], która w swej pierwotnej wersji miała około 600 ustępów. Dopiero pierwszy jej wydawca w druku N. Gerber w 1546 roku podzielił ją na 14 ksiąg, z których każda (poza ostatnią, którą dopełniają do mniej więcej tysiąca, pewne dodatki) liczy 1000 wierszy (podział

[3] Tę pozycję [32] można znaleźć w Bibliotece im. R. Taubeschlaga Instytutu Papirologii, Prawa Rzymskiego i Antycznego Uniwersytetu Warszawskiego.

[4] Są to 15-zgłoskowce jambiczne.

ten nie respektuje nawet podziału księgi na owe ustępy). I dlatego nazwał ją *Chiliadami* (*χιλιοι* = chilioi = tysiąc). Nazwa ta się przyjęła i jako *Chiliady* dzieło cytuje się do dziś (patrz Jurewicz [15, str. 260–263]). *Chiliady* były ponadto wydane w początku XVII wieku, w końcu XVIII wieku oraz jako pozycja [33][5] (oparta na dwóch rękopisach monachijskich) w 1826 roku. To ostatnie wydanie przedrukowano, względnie niedawno, fotograficznie. Krytycznego wydania odpowiadającego w pełni dzisiejszym wymaganiom – jak się zdaje – brak. Poza łacińskim (zdaje się, że tylko częściowym) przekładem z początku XVII wieku, którego brak w polskich bibliotekach, być może nie istnieją inne przekłady *Chiliad* (w szczególności na języki nowożytne).

Otóż w jednej z *Chiliad* (II, 35, 103–108) znajduje się wzmianka przekazana – w nieco różnych wersjach – przez oba rękopisy monachijskie:

103 Ów Archimedes, mędrzec rozumny
Urodzony i mieszkający w Syrakuzach, starzec, geometra
Żył [lat] **siedemdziesiąt i pięć**, ...
... wiele wynalazków zrobił
i wprawiwszy w ruch ręką urządzenie, ha! i królewski
50 000 [75 000] medymnowy[6] ciągnął [ciężki] statek[7].

(moje tłumaczenie jest chropowate – chciałem, by było możliwie bliskie dosłownemu i by umieścić te same słowa w tych samych wierszach co w oryginale; oba rękopisy podają różne wyporności czy ładowności statku). Ze wzmianki tej wynika, że Archimedes zmarł, mając 75 lat. A więc, jeśli się zakłada, że umarł on w −211 roku, wynika stąd, że urodził się w roku −286. Bardzo to jest proste, tylko skąd Tzetzes mógł wiedzieć, że żył on właśnie 75 lat? Żadne inne znane nam źródło nie zna tego faktu (nie mówiąc już o tym, że – jak już wspomnieliśmy – sami zainteresowani na ogół nie znali dokładnej liczby lat). Sam Tzetzes skarży się w swych pamiętnikach, że nie dysponuje książkami, i że musi ufać swej (zawodnej) pamięci. Zrobił on – właśnie z pamięci – skrót

[5] Ta pozycja [33] znajduje się w Bibliotece Uniwersytetu Warszawskiego oraz w Bibliotece Jagiellońskiej – za tę ostatnią informację dziękuję p. dr Alinie Dawidowicz.

[6] 1 medymn (ateński – były i inne) = około 51,8 litra. Jeśliby na serio traktować dane Tzetzesa, daje to około 2600 (ewentualnie 3900) ton metrycznych lub angielskich wyporności (wagi okrętu) lub nośności (ładowności DWT). Raczej nie wchodziłaby tu w grę pojemność statku 905 (ewentualnie około 1200) BRT lub NRT.

[7] *Ο Αρχιμηδης ο σοφος, μεχανετης εκεινος,*
Τω γενει τε Συρακουσιος ην, γερων γεωμετρης,
Χρονους τε εβδομηκοντα και, πεντε παρελαυνων
Οστις ειργασατο πολλας μηχανικας δυναμεις
Και τη τρισπαστω μηχανη χειρι λαια και μονη
Πεντε [επταπεντα] *μυριομεδιμνον καθειλκυσεν ολκαδα.*

Iliady (nazwany „Iliaca") i jak dziś łatwo można sprawdzić, w wielu miejscach poprzekręcał jej tekst. Ponadto w *Chiliadach* występują ustępy, które, jak dziś wiemy, świadczą o tym, że Tzetzes sam wymyślał różne barwne anegdotki, by nimi ozdobić swoje dzieło. Na przykład, pierwszy podał (i jak się zdaje sam wymyślił) historię o żebraniu przez Belizariusza po jego upadku („...data obolii Belisarii..."). Historyjka ta zupełnie nie pasuje do znanych nam i dobrze źródłowo potwierdzonych faktów. Jeszcze gorzej jest z jego *Scholiami* do jego własnych *Chiliad*. Mają one dostarczyć poprawki do tych ostatnich (a także być ich uzupełnieniami). Tymczasem nie tylko wcale nie poprawiają większości usterek, ale i w nich samych roi się od błędów.

Najprawdopodobniej Tzetzes wiedział, że według starożytnych Archimedes żył długo (chociażby ze wspomnianej wyżej wzmianki u Polibiusza) i sam „dorobił" pasującą mu okrągłą liczbę „75" lat. Był, jak wszyscy znawcy podkreślają, niezłym gramatykiem, ale bardzo poślednim poetą – po prostu wsadził w wiersz to co mu dawało dobry (względnie) rytm wiersza. Zauważmy zresztą, że po grecku „i" („*και*") jest konieczne, gdy w liczbie podaje się cyfry od odpowiadającej najmniejszym jednostkom, natomiast rzadko się ten spójnik stosuje (acz nie jest to błędem językowym), gdy się cyfry podaje od odpowiadającej największym jednostkom (tu dziesiątkom) – tak jak w tym tekście zrobił Tzetzes (porównaj – na przykład – niemieckie *zweihundert sieben und dreizig*). Widzimy zresztą, że Tzetzes w jednym zdaniu podaje zarówno wiek Archimedesa, jak i legendarną (?) historyjkę o ściągnięciu przez niego w pojedynkę za pomocą jakiejś „maszyny" (wielokrążka lub śruby, dźwignia nie wchodzi tu w rachubę) ciężkiego statku z brzegu na wodę (normalnie robiło to kilkudziesięciu (czy nawet więcej) ludzi). Nie musimy więc tej liczby „75" brać na serio, szczególnie że w jednym z rękopisów występuje ona (omyłkowo?) po raz drugi (acz za drugim razem jest inaczej zapisana) jako pojemność czy wyporność okrętu. Tego typu błędy dają się dobrze prześledzić w setkach średniowiecznych rękopisów Pisma Św. (patrz, na przykład, [1, str. 869]).

W naszych źródłach Archimedes w chwili śmierci określany jest jako „presbiteros" = starszy, stary. Ale nie można stąd wyciągnąć wniosku, jaki wyciągają niektórzy, że miał wtedy co najmniej 70 lat, a więc, że urodzony był przed −280 rokiem. W starożytności ludzie żyli przeciętnie znacznie krócej niż teraz. Późny (a nawet starczy) wiek w Grecji hellenistycznej III w a.Ch.n. mógł oznaczać i wiek 50 lat (a nawet mniejszy). Ale mógł oznaczać też 80 czy też nawet 90 lat. Według starożytnych w chwili zdobycia Syrakuz przez Rzymian Archimedes był w pełni sił fizycznych i umysłowych. A więc raczej nie miał jeszcze 80 lat życia. Znaczyłoby to, że był urodzony gdzieś między −290 a −260 rokiem. Ale nie można wykluczyć jeszcze nieco szerszych granic.

A czy nie znamy jakichś faktów z życia Archimedesa, które by pozwoliły na ich zawężenie? Z nie najlepiej źródłowo potwierdzonych faktów: iż był kuzynem długowiecznego króla Hierona II (lub jego syna Gelona II) – wiadomość podana przez Plutarcha, oraz, że jego ojcem był astronom Fidiasz (nie mylić ze 150 lat wcześniejszym rzeźbiarzem!) – wiadomość oparta na pewnej poprawce (m.in. opowiada się za nią Paweł Tannery) do istniejących rękopisów – nie wynika nic. A stąd, że cytował Euklidesa i przynajmniej korespondował z Eratostenesem (a nawet może miał z nim osobiste kontakty w Aleksandrii – jak to podaje działający koło roku 0 Diodor z Sycylii – patrz [10; 37,3]) wynikają tylko pewne ramy dla tych dwóch ostatnich uczonych (nie znamy bowiem ich życiorysów).

Wniosek. O roku urodzenia Archimedesa trudno jest chyba powiedzieć coś więcej niż to, że był urodzony w pierwszej połowie III wieku a.Ch.n., raczej bliżej środka tej połowy niż jej krańców.

4. Zdobycie Syrakuz

Nim omówimy udział Archimedesa w obronie Syrakuz oraz okoliczności jego śmierci, musimy najpierw krótko opisać przebieg oblężenia Syrakuz. Jego opisy są na ogół – niesłusznie – pomijane przy omawianiu życiorysu Archimedesa.

Syrakuzy zostały założone przez Koryntyjczyków na blokującej dużą zatokę wysepce Ortygii, to jest „Wyspie Przepiórek" już (podobno) w roku −733. Później miasto objęło swym zasięgiem obszary na północ od wysepki, a mianowicie wschodnią część dużego płaskowyżu. Część tę nazywano Achradiną. Zarówno Ortygię, jak i Achradinę otoczono murami. Natomiast jeszcze bardziej na północ, nad zatoką Trogillos wybudowano parę fortów. Z nich najpotężniejszy był port Hexapylon („Sześciowieżowy") – panował on nad ową zatoką Trogillos, ale jego dokładna lokalizacja nie jest obecnie znana.

W czasie wojny peloponeskiej Ateńczycy oblegali Syrakuzy (w latach −413 i −412). Udało się im zająć wzgórze Epipolae, które łączyło wzmiankowany płaskowyż ze wzgórzami leżącymi bardziej w głębi lądu. Opisuje to dokładnie Tukidydes w swej *Wojnie Peloponeskiej* (księga VI, ust. 65–104, patrz [30] lub [31, str. 400–426]).

Ateńczycy nie zdobyli w końcu Syrakuz. Tak samo parę lat później odeszli (nie uzyskawszy żadnego sukcesu) od nich Kartagińczycy, a nawet w −263 roku Rzymianie (po raz pierwszy). Ponieważ jednak bano się dalszych ataków, więc na przełomie V i IV wieku a.Ch.n. cały płaskowyż otoczono murami, w skład

których wszedł Hexapylon (pełnił on też funkcję jednej z bram miejskich), a na wąskim dojściu do Epipoli zbudowano w murach fort Euryleos. Dziś stanowi on największą zachowaną budowlę obronną starożytności. Być może był i nią w tamtych czasach.

W czasie II wojny punickiej (od −217 do −200), a w szczególności po bitwie pod Kannami (w −215) cała Italia była wciągnięta w zmagania Rzymu i Kartaginy. I tak w Syrakuzach w ciągu ostatnich paru lat przed ich zdobyciem były aż dwie rewolucje powodujące całkowite zmiany władz. A także zmiany orientacji politycznej władz miasta. Pierwsza – prokartagińską na prorzymską, a druga na odwrót. Przy okazji wymordowano całą rodzinę dawnych władców (jeśli Archimedes był rzeczywiście kuzynem króla Gelona, to jakoś mu to uszło „na sucho").

W pewnym momencie do Syrakuz wtargnęło 2000 antyrzymskich uchodźców. W odpowiedzi na to, w roku −213 lub −212 (prawdopodobnie na wiosnę) – jak już pisaliśmy – Rzymianie podeszli pod Syrakuzy. Jeśli mamy wierzyć Polibiuszowi (*Dzieje* fragmenty ks. VIII, ustępy 5–9, patrz [27] lub [28, str. 370–373]), a także i Liwiuszowi (patrz *Ab Urbe condita* = *Dzieje*, księga XXIV ustępy 33 i 34, [17] lub [19], lub [20, str. 213 i 214]), to chcieli oni miasto wziąć nieomal z marszu – ściśle rzecz biorąc, po kilku (pięciu) dniach przygotowań. Ponieważ na najłatwiejszej (terenowo) drodze do miasta Euryleos był zbyt potężną przeszkodą, więc flota rzymska miała atakować od morza (od zachodu) mury Achradiny, zaś wojsko lądowe fort Hexapylon (od północy) od strony zatoki Trogillos. Oba te zamierzenia nie udały się. Niepowodzenia zrzucono na jakieś wynalazki Archimedesa (patrz punkty nr 8 i nr 9).

Rozpoczęło się długie i nudne oblężenie. Wojska rzymskie czasem częściowo odchodziły od miasta, by walczyć z jakimiś oddziałami idącymi Syrakuzom na odsiecz. Flota rzymska zaś nie zawsze panowała nad podejściami morskimi, tak że tą drogą często docierało do Syrakuz zaopatrzenie. Nie pomogły też próby wywołania przez szpiegów nowej rewolty w mieście. Marcellus – jak już pisaliśmy – stwierdził, że siedzi już trzeci rok pod miastem (raczej ponad 2 1/2 roku lub o rok mniej lub więcej).

Tymczasem w mieście zaczęło być głodnawo, i jak już wiemy – podobno dzięki jesiennej (?) niepogodzie – wybuchła zaraza, która osłabiła obrońców. Wreszcie Rzymianie dowiedzieli się od szpiegów, że po kilkudniowym święcie Artemidy obrońcy, którzy mieli mało co do jedzenia, ale dużo wina do picia, są pijani i śpiący, a więc zmniejszyła się uwaga posterunków. Postanowiono więc ruszyć do nowego szturmu. Szturmujący ruszyli od zatoki Trogillos (patrz Liwiusz *Dzieje* XXV, 24–31, [19; 20, str. 258 i następne]), przekroczyli niski w tym

miejscu mur, zdobyli od tyłu Hexapylon i mieli w swym ręku dzielnice Tyche i Neapolis, a po paru dniach i Epipolae.

Dopiero po pewnym czasie (po kilku dniach czy tygodniach, a może dopiero po paru miesiącach) zdołano sforsować mur Achradiny. Walki toczyły się jednak dalej. Po jakichś – niezbyt jasno opisanych – pertraktacjach ostatecznie opór ustał i miasto poddano rabunkowi. Z tym że przy domach zwolenników Rzymu (najczęściej byli oni sami, już – w charakterze uciekinierów – obecni w obozie Rzymian, a więc byli po prostu zdrajcami) ustawiono posterunki wojskowe, które miały chronić te domy przed rabunkiem.

A jak postępowali Rzymianie po zdobyciu miast – szczególnie takich, które ich zdaniem dopuściły się zdrady? Na przykład wcześniej dowódca spod Syrakuz, znany nam już M. Claudius Marcellus, nakazał w −215 roku egzekucję 70 przywódców miasta Noli (patrz Liwiusz [18, XXIII, 17] lub [20]). Tenże sam Marcellus kazał (koło roku −213) po zdobyciu Leontinoj wychłostać, a po tym pozbawić życia 2000 uciekinierów (których uważał za zdrajców).

Wspomnijmy jeszcze o tym, co się zdarzyło nieco później niż zdobycie Syrakuz. A mianowicie w rok po ich zdobyciu (a więc w roku −210 lub −209) Rzymianie zdobyli Kapuę (popierającą Kartaginę) i po jej zdobyciu wymordowali prawie całą elitę (a resztkę wygnali). Opisuje to dokładnie i cynicznie Liwiusz w *Dziejach* (księga XXVI, ust. 12, patrz [17] lub [18], lub [20, str. 293 i następne]). Zauważmy zresztą, że fakt późniejszego zdobycia Kapui niż Syrakuz wynika tylko implicite ze źródeł starożytnych, ale nie jest w nich przekazany w sposób wyraźny.

I tak tuż przed upadkiem miasta kapuańskie „ważne figury" zebrały się na ucztę. Po niej „około" 27 osób zażyło truciznę. Po zdobyciu miasta kilkudziesięciu „prominentów", którzy nie popełnili samobójstwa, Rzymianie okrutnie biczowali, aby – w końcu – zamordować. Podobny bezlitosny los spotkał – nieco później – aż kilkuset nieco mniej ważnych obywateli kapuańskich. Dlaczego ci ludzie decydowali się na samobójstwo? Prawdopodobnie w oparciu o precedensy musieli dobrze wiedzieć o losie, który ich czeka. Jeżeli zdobycie Kapui nastąpiło później niż zdobycie Syrakuz, to takim precedensem mogło być i ich zdobycie. Gdyby była odwrotna kolejność, to zachowanie Rzymian w Kapui wskazywałoby i tak na ich okrutne zwyczaje. Zauważmy, że Rzymianie uważali oblężenie (a później rabunek) Syrakuz też za karę za zdradę: za taką bowiem uważali wzmiankowane przyjęcie antyrzymskich uchodźców i zmianę orientacji na antyrzymską. Dlaczego więc Liwiusz opisuje dokładnie zachowanie się Rzymian w Kapui, a w Syrakuzach opuszcza ich okrucieństwa? Po pierwsze, nie wiemy, jakie miał źródła (pisał przecież przeszło 200 lat po owych zdarzeniach). Po drugie Syrakuzy były miastem greckim,

a Kapua nie, zaś Rzymianie w czasach Liwiusza lubili się przedstawiać jako wielbiciele i przyjaciele Greków. Co gorzej, Kapua wprawdzie była tylko miastem Italików, lecz już ponad sto lat jej obywatele mieli obywatelstwo rzymskie (wprawdzie „sine sufragio" = bez prawa głosu i nie zawsze w czasie różnych wojen stali po stronie Rzymu), tak że Liwiusz mógł o nich jako o zdrajcach pisać źle.

Wyczerpaliśmy tutaj właściwie wszystkie źródła starożytne. Wprawdzie Dion w swej *Historii rzymskiej* (fragmenty księgi XV, patrz *Historia Romana* [8] lub [9, str. 58]) coś niejasno mówi o tym, że „potem Marcellus stłumił podejrzliwość, jaką żywił względem Nolańczyków" oraz że w jakimś momencie obawiał się buntu Syrakuzańczyków, ale z tych szczątkowych informacji nie da się wyciągnąć żadnych wniosków. A nawet gdyby się dało, to i tak nie miałyby one żadnego znaczenia, gdyż Dion (koło 163–235 roku) swą *Historię* pisał w pierwszej ćwierci III wieku AD, to jest przeszło 400 lat po opisywanych wypadkach.

5. Okoliczności śmierci – wedle starożytnych

Opisy śmierci Archimedesa są bardzo rozpowszechnione – i to nie tylko w popularnej literaturze. Zachowało się nawet kilka mozaik starożytnych może tę śmierć przedstawiających: nad jakimś siedzącym starcem (Archimedesem?) stoi z obnażonym mieczem okrutny żołnierz rzymski. Ale najbardziej znana mozaika (reprodukowana – na przykład u Bartela Leeanderta van der Waerdena (patrz [38, wkładka 24], lub [39, str. 350]) lub u Franza Wintera (patrz [42]) jest prawdopodobnie renesansowym, powiedzmy, falsyfikatem (kopią?) zrobionym w szkole Rafaela. Na tej mozaice żołnierz ma zupełnie fantazyjną zbroję (ale taką, jaką uważano za rzymską w XVI wieku), natomiast przed siedzącym starcem na stoliku stoi skrzynka z piaskiem: liczydło lub abak, ewentualnie urządzenie do robienia rysunków.

Wszystkie spotykane opisy (i ewentualnie ilustracje do nich) mają jednak bardzo słabe potwierdzenie w znanym nam materiale źródłowym. Zobaczymy, co wchodzi w jego skład.

Jeśli u Polibiusza była opisana śmierć Archimedesa, to musiała być opisana w tej części księgi 8, której akurat brak.

Liwiusz (T. Livius: *Dzieje*, XXV, 31 – patrz [17] lub [19], lub [20, str. 268]; książka była ukończona w roku +9) opisuje dość lakonicznie, jaki bałagan panował w Syrakuzach po ich zdobyciu przez Rzymian – wydaje się, że było wtedy wiele gwałtów i rozbojów: „Wiele tam było brzydkich przykładów gniewu, wiele chciwości". Po czym o Archimedesie pisze krótko, że „ab ignaro milite,

quis esset, interfectum" („został zabity przez nieoświeconego żołnierza"). Cały ustęp robi wrażenie, jakby jego autor wolał coś przemilczeć.

Plutarch z Cheronei (piszący na przełomie I i II wieku, a więc mniej więcej sto lat po Liwiuszu, a trzysta lat po zdobyciu miasta) napisał – bardzo hagiograficzny w swej wymowie – życiorys zdobywcy Syrakuz Marcellusa (Marcellus, 29), dodając mu za parę Pelopidasa. W tym życiorysie podane są aż trzy wersje śmierci Archimedesa. Gdy po trzyletnim oblężeniu Rzymianie nareszcie zdobyli Syrakuzy (patrz punkt nr 4), to – wedle Plutarcha (patrz [24] lub [25], lub [26, str. 276 i nast.] – brak nowszego polskiego tłumaczenia tego życiorysu; istnieje tylko XVIII-wieczna parafraza Ignacego Krasickiego) – żądni zemsty żołnierze chcieli urządzić rzeź mieszkańców, a samo miasto zburzyć. Marcellus wprawdzie zakazał zabijać, brać do niewoli i gwałcić *wolnych* obywateli, ale jednak pozwolił na (3-dniowy) rabunek. To znaczy, że wolno było nie tylko obrabowywać wszystkich (wolnych i niewolnych), ale też wolno było brać do niewoli i gwałcić niewolników (wolno było też zabijać niewolników, ale to nie wchodziło z zasady w grę – żywy niewolnik był przecież zbyt cennym łupem).

W każdej z tych trzech wersji Archimedesa znalazł rzymski legionista, i
- albo Archimedes prosił żołnierza, by poczekał, aż on skończy dowód (związek z rzekomym roztargnieniem Archimedesa – patrz punkty nr 8 i 10), a żołnierz nie chciał nań zaczekać,
- albo po prostu Archimedes nie chciał pójść (rzekomo do Marcellusa) z żołnierzem,
- albo wreszcie Archimedes został w celach rabunkowych zabity, gdy niósł swe cenne instrumenty astronomiczne w darze dla Marcellusa.

Podana przez B. L. van der Waerdena wiadomość (patrz [38] lub [39, str. 351]) jakoby Marcellus miał wydać rozkaz indywidualnego oszczędzenia życia Archimedesa (i przyprowadzenia go do siebie) nie ma pokrycia w źródłach starożytnych – chyba że uznamy, iż wynika to implicite z drugiej wersji Plutarcha.

We wszystkich tych wersjach nie są powtórzone ewentualne wymiany zdań między żołnierzem a Archimedesem. Obecnie znana wszystkim – łacińska wersja o okręgach („noli tangere circulos meos" – „zechciej nie ruszać moich okręgów") – jest jeszcze znacznie późniejsza. Jej pierwowzór został zanotowany po raz pierwszy dopiero przez znanego nam już Tzetzesa, a więc gdzieś koło roku 1150! I to w formie (*Chiliady*, II, 35, 140 – w [3, str. XVIII], podane jest błędnie 135) – „*'Αποστηθι, ω ανροπε, του διαγραμματοσ μου*" = „Aposthedi, o antrope, tou diagrammatos mou" – „Zejdź, o człowieku, z mego rysunku". Ciekawą rzeczą jest, że nieco wyżej Tzetzes użył w odniesieniu do śmierci

Archimedesa słowa, które mogło oznaczać zarówno „śmierć", jak i „zabicie", ale też było eufemizmem na określenie egzekucji... Wersja Tzetzesa została powtórzona – w wersji nieco dłuższej („odejdź ode mnie i od mego rysunku") – przez późniejszego o kilkanaście lat Jana Zonarasa (*Annales* IX, 5, patrz [43] lub [44]), też – oczywiście po grecku (nb. uważa się, że Zonaras dokładniej powtarza swe źródła niż Tzetzes; nie oznacza to jednak, że jego źródła były lepsze). Warto przy okazji zauważyć, że dopiero Valerius Maximus (patrz [34, VIII, 7, 7]) w I wieku AD sugeruje istnienie rysunku na ziemi.

Nie spotkałem się z informacją, kiedy powstała znana nam powszechnie łacińska wersja „noli tangere circulos meos". Prawdopodobnie jest to produkt renesansu, a więc XVI (a może nawet jeszcze późniejszego) wieku.

Zauważmy przy okazji, że Archimedes na pewno nie znał łaciny – bo skąd by Grek z Sycylii w III a.Ch.n. zainteresował się językiem jednego z małych, barbarzyńskich państewek ze środkowej Italii? Faktu tego nie zmienia szybkie rośnięcie tego państewka w ciągu życia Archimedesa. Równocześnie rzymski legionista, a więc raczej chłop ze środkowej Italii – prawie na pewno – nie znał greki.

Pierwsze dwie wersje Plutarcha też mogłyby sugerować kłopoty językowe jej bohaterów. Druga jest wewnętrznie sprzeczna: jaki żołnierz (i to, na ogół bardzo zdyscyplinowany, rzymski żołnierz!) ośmieliłby się – nawet w chwili złości – zabić kogoś, kogo miał żywcem przyprowadzić? A ponadto wszystkie trzy są sprzeczne z podanym uprzednio zakazem zabijania osób wolnych (który zresztą chyba nie był zbyt skrupulatnie przestrzegany). Uderzającą jest rzeczą, że wielu autorów wierzy bez zastrzeżeń Plutarchowi (patrz – na przykład – T. Heath we wstępie do [3, str. XVII i XVIII], B. L. van der Waerden [38] lub [39], ewentualnie [12]). Być może jest to wywołane sentymentem do doskonałego pod względem literackim Plutarcha, który ponadto dostarczał wielu tekstów do nauki greki (w czasach, gdy jeszcze uczono tego języka w szkołach).

Źródła nie przekazały nam informacji, w jakiej dzielnicy Syrakuz i w czasie jakiej fazy ich zdobywania Archimedes stracił życie.

6. Okoliczności śmierci – co było naprawdę

Wedle zwyczajów rzymskich zdobyte miasto wydawano zazwyczaj na jedno- lub trzydniowy rabunek. W zasadzie mieszkańców wtedy nie mordowano, ale rabujący byli zdenerwowani, bali się pułapek (a przecież rzeczy wartościowe były w takiej sytuacji chowane gdzieś w najdalszych zakamarkach domów), więc w razie jakiejś niezbyt jasnej sytuacji zabijano każdą podejrzanie zachowującą się osobę – szczególnie że nie było się za to, w zasadzie (mimo

zakazów), karanym. Zabijano też brutalnie przy każdej próbie ratowania kobiet od gwałtów. Tego rodzaju sytuacje w ciągu ostatnich 200 czy 300 lat w Europie zdarzały się już tylko raczej sporadycznie (na przykład w Saragossie po jej zdobyciu przez Francuzów i... Polaków w styczniu i lutym 1809 roku). Ale ostatnio można je było zobaczyć w całej okazałości 50 lat temu w zewnętrznych dzielnicach Warszawy w czasie Powstania Warszawskiego (szczególnie w pierwszej jego połowie), gdy „czubarycy" mogli rabować mieszkania. Ale byli oni w bardziej komfortowej sytuacji niż Rzymianie, mieli bowiem zawsze przy sobie broń palną krótką (pistolety, pepesze), której można było użyć także w ciasnym pomieszczeniu, tymczasem rzymski legionista ze swym mieczem („gladius", włóczni „pilum" na pewno nie brał z sobą na rabunek – nie wiem, jak było ze zbroją, chyba też jej nie brał z sobą) był właściwie zupełnie bezbronny w ciasnych i ciemnych zakamarkach domów (szczególnie jeśli był sam – a na ogół rabowano samotnie).

Trzeba pamiętać, że rabunek zdobytego miasta był uregulowany w armii rzymskiej bardzo dokładnymi przepisami (dziś powiedzielibyśmy: regulaminami) i 20% lub 25% wartości zrabowanego mienia szło dla rabującego, reszta dla państwa. Tę resztę sprzedawano w czasie swego rodzaju aukcji. Oczywiste jest, że przy okazji rabunku wiele dóbr ulegało zniszczeniu. Warto tu przypomnieć przejmujący opis Polibiusza niszczenia przez rzymskich żołnierzy cennego obrazu w Koryncie (*Dzieje* księga XXXIX, ust. 13, patrz [27] lub [28]).

Archimedes mógł więc zginąć przy obronie swego mienia (mogły nim być właśnie przyrządy naukowe, robione wtedy wyłącznie z łatwiejszych wówczas do precyzyjnej obróbki szlachetnych metali, czy książki) lub swych kobiet (córki, wnuczki, może żony, niewolnicy czy niewolnic). Powstaje pytanie – jeśli wedle Plutarcha (patrz jak wyżej [24] lub [25], lub [26]) Marcellus tak bardzo chciał ochronić Archimedesa (a przynajmniej jego życie), to dlaczego nie postawił przed jego domem posterunku wojskowego (tak jak to zrobił z domami, które chciał ochronić przed rabunkiem)?

Ale istnieje jeszcze inna, mniej korzystna dla Rzymian, możliwość przebiegu wypadków. U Tukidydesa po każdym opisie zdobycia miasta można przeczytać „...wszystkich mężczyzn zabili, a kobiety i dzieci sprzedali w niewolę...". Rzymianie zazwyczaj nie robili ogólnej rzezi w miastach, które zamierzali przyłączyć do swego państwa. Po prostu cenili sobie życie ludności, która odtąd miała na nich pracować. Ale to nie zmieniało faktu ich okrucieństwa.

W czasie II wojny punickiej było kilka przewrotów w Syrakuzach. Nie wiemy, jaką rolę w nich odgrywał Archimedes. Jeżeli był rzeczywiście kuzynem (czy choćby przyjacielem) wcześniejszych władców Syrakuz (którzy byli sojusznikami Rzymu – nie zawsze zresztą pewnymi), to może raczej należał do stronnictwa

filorzymskiego. Ale to by i tak nie musiało wykluczyć faktu, że ostatecznie został (może mimo woli?) jednym z działaczy stronnictwa prokartagińskiego, a więc antyrzymskiego? Brak nam tu zupełnie danych źródłowych.

Czy w Syrakuzach – tak jak w Kapui – nie urządzili Rzymianie egzekucji całej elity? A przynajmniej tej jej części, która nie zbiegła do Rzymian? Z punktu zachowanych do dnia dzisiejszego źródeł nic nie stoi na przeszkodzie przyjęciu, że w Syrakuzach wymordowano elitę miasta, a wśród niej zamordowano też i Archimedesa. Na odwrót, są zanotowane (cytowane i nie cytowane wyżej) precedensy takich egzekucji. Myślę, że świadome zamordowanie Archimedesa w czasie egzekucji jest co najmniej bardzo prawdopodobne. Jeśli tak było, to łatwo można się domyślić, jak Rzymianom później zależało na ukryciu tego faktu...

W starożytności im kto był postawiony wyżej, tym był bardziej narażony. To dopiero w średniowieczu, im kto był możniejszy, tym miał większą szansę na przeżycie niewoli – po prostu dawał gwarancję zapłacenia za siebie większego okupu. Wystarczy na przykład przytoczyć choćby Jana Froissarta *Kroniki* (patrz [11]), a w szczególności historię jeńców wziętych do niewoli w czasie bitwy pod Aljubarrota (14. VIII. 1385 – Froissart był jej naocznym świadkiem).

My stosowanie „etosu rycerskiego" (który nakazywał obchodzić się wstrzemięźliwie z wziętymi do niewoli przywódcami i który, przynajmniej początkowo – jak widzieliśmy – nie miał wcale najszlachetniejszych motywacji...) uważamy na ogół za rzecz oczywistą. Niemniej jednak odejścia od niego notowano i w XX wieku AD. Na przykład Niemcy po zdobyciu Warszawy we wrześniu 1939 wprawdzie jej nie rabowali (przynajmniej oficjalnie), ale chcieli wyaresztować pozostałą w niej resztę elity władzy. W ten sposób zginął prezydent Warszawy Stefan Starzyński. Wspomnieć tu należy też wymordowanie przez Niemców profesorów wyższych szkół we Lwowie w lipcu 1941. Z kolei Sowieci w marcu 1945 roku chcieli wyaresztować elitę władzy – nazwijmy ją – akowską. I udało się im to w Milanówku, gdy 16 osób uwierzyło w słowo honoru generała sowieckiego Sierowa (Iwanowa)[8]. A czym innym jak nie odejściem od etosu

[8] Mało znanym faktem – nawet w kręgach matematyków – jest, że osób zaproszonych przez Sierowa było siedemnaście. Siedemnastą miał być ówczesny docent Uniwersytetu Warszawskiego, logik Bolesław Sobociński (zmarły w 1977 roku w South Bend jako emerytowany profesor University of Notre-Dame). Mimo że uchodził za nieżyciowego ekscentryka (ta cecha przypisywana była też Archimedesowi – patrz niżej nr 8 i 10), był jedynym, który na słowo honoru generała Sierowa nie dał się nabrać (zaobserwował obstawienie Milanówka sowieckimi oddziałami). I nawet obecnie zdarzające się wypowiedzi mające uzasadnić konieczność „wpakowania się" w sowiecką pułapkę nie mogą usprawiedliwić naiwnego sposobu myślenia pozostałych szesnastu przywódców.

rycerskiego był proces norymberski (abstrahuję tu od oceny rzeczywistej winy jego podsądnych)?

Wniosek. Archimedes zginął albo mniej więcej przypadkowo w czasie rabunku Syrakuz po zdobyciu ich przez Rzymian, albo – co jest prawdopodobniejsze – nastąpiła jego świadoma egzekucja zarządzona przez dowództwo rzymskiej armii.

7. Grób

Według Liwiusza (*Dzieje*, XXV, 31, patrz [17] lub [19], lub [20, str. 268]) pogrzeb Archimedesa miał rzekomo urządzić właśnie Marcellus. Ale może to być po prostu usprawiedliwiająca Marcellusa wersja wydarzeń (Liwiusz pisał swoje dzieło mniej więcej 200 lat po zdobyciu Syrakuz). A nawet jeśli by to było prawdą, to mógł on najpierw zarządzić egzekucję Archimedesa, a potem zostać przekonanym przez lepszych niż on znawców kultury greckiej o konieczności pewnego zadośćuczynienia, które by się należało skazańcowi, a raczej – jak pisze Liwiusz – jego bliskim. Osobiście myślę, że raczej była to usprawiedliwiająca Rzymian (i Marcellusa) opowiastka. Ale urządzenie pogrzebu to nie zbudowanie grobu – o tym ostatnim fakcie nasze źródła milczą. I dlatego – wbrew często spotykanej opinii – grób Archimedesa raczej nie był fundowany przez Marcellusa, tylko przez rodzinę Archimedesa, ewentualnie przez jego przyjaciół (przecież Rzymianie po zdobyciu Syrakuz dość szybko poszli wojować gdzie indziej).

Na grobie miał być przedstawiony – podobno zgodnie z wyrażonym jeszcze za życia życzeniem Archimedesa – cylinder i kula lub może cylinder opisany na kuli (przedstawiający największe – jak on sam uważał – jego osiągnięcie naukowe) oraz pewien sześciowiersz. Jeśli rzeczywiście takie było życzenie Archimedesa, to raczej można je sobie wyobrazić jako życzenie skazańca niż osoby przypadkiem zabitej (chociaż mogło być wypowiedziane wcześniej).

Ten pomysł grobu był imitowany. Na przykład C. F. Gauss na cmentarzu w Getyndze ma podobny grób. Umieszczono na nim symboliczne przedstawienie największego (jak mniemano) osiągnięcia naukowego Gaussa, pod postacią graniastosłupów o liczbie boków będących początkowymi liczbami Fermata. Graniastosłupy te są tam pełnymi rzeźbami.

Ale skąd wiemy, że taki grób Archimedesa istniał naprawdę? Mianowicie, M. Tuliusz Cycero wspomina w *Disquisitiones Tusculanae* (V, 64–66, patrz [5] lub *Rozmowy Tuskulańskie* [6, str. 716]), pisanych koło −40 roku, że kiedy był kwestorem na Sycylii (w roku −74), to chciał odszukać ten grób. Syrakuzań-

czykom był on wszakże nieznany. Cycero wiedział jedynie, że na nim były przedstawione kula i cylinder, a ponadto że wyryto na nim 6 wierszy heksametru – które nawet znał na pamięć (ale których nam nie przekazał, tak że my ich dziś nie znamy). Cmentarze w starożytności klasycznej na ogół okalały drogi przed bramami miasta. Cycero rozpoczął poszukiwania w Syrakuzach za bramą Agrygentyńską. I tam zobaczył, że z gęstwiny krzewów (prawdopodobnie śródziemnomorskiej „macchii") wystawał smukły słupek, na którego wierzchołku było coś, co przypominało kulę i cylinder.

Nie można było się doń wszakże dostać, gdyż jego otoczenie było gęsto zarośnięte kolczastymi krzakami. Cycero kazał je wyciąć i doszedłszy do grobu stwierdził, że sam grób jest w niezłym stanie i istotnie zawiera znany mu (lecz nie nam) wiersz (tylko jego dwa ostatnie wersy były zniszczone). Wbrew wielu przeciwnym opiniom chyba nie można mieć wątpliwości, jak ten grób wyglądał: kamienny, wąski walec wysoki na pół do półtora metra; jedynie można mieć wątpliwości co do tego, czy walec i kula były obok siebie, czy też jedno nad drugim (ze względu na opis Cycerona trzeba raczej wykluczyć lansowaną przez niektórych sugestię, że były one przedstawione jako płaskorzeźba czy płaskorzeźby). Zauważmy, że ten grób nie odpowiadał żadnemu z dwóch typów ateńskich grobów, jakie do dziś możemy oglądać w dużej ilości na cmentarzu Keramejku znajdującego się w Atenach za Dipilońską Bramą. Ale to tylko potwierdza jego nietypowy wygląd.

Ponieważ Rzymianie traktowali cmentarze jako nienaruszalne obiekty, więc śmiało można przypuszczać, że jeśli grobu Archimedesa nie zniszczyło jakieś trzęsienie ziemi lub korzenie drzew czy krzewów (jak to się obecnie dzieje na cmentarzu Père-Lachaise w Paryżu), to istnieć on musiał przynajmniej do końca starożytności. Dziś nawet nie jesteśmy pewni, gdzie był ów cmentarz. Nie wiadomo dokładnie, gdzie była brama Agrygentyńska w Syrakuzach – prawdopodobnie leżała gdzieś w okolicy obecnego dworca kolejowego Syrakuz – ale nie jest to pewne. Na zachód od owego dworca istnieją obecnie resztki jakiegoś starożytnego cmentarza, ale wszystkie ocalałe na nim groby pochodzą z czasów znacznie późniejszych (z czasów późnego Cesarstwa Rzymskiego).

Istnienie tego grobu Archimedesa wyklucza raczej ogólną rzeź w Syrakuzach po ich zdobyciu. Gdyby miała ona miejsce, to pewnie nie byłoby kogoś, kto mógł ciało Archimedesa zidentyfikować, a nawet gdyby je zidentyfikowano, to nie było nikogo, ktoby mógłby zadbać o jego indywidualny pogrzeb i tym bardziej o grób, i to jeszcze grób o niebanalnym wyglądzie. Ten brak rzezi jest zresztą w zgodzie z zachowanymi starożytnymi źródłami.

Warto dodać dwie uwagi. Po pierwsze, że prawie na pewno ten grób Archimedesa nie był grobem, w którym by leżało jego ciało, lecz był miejscem,

w którym prawdopodobnie w jakiejś urnie złożono prochy zebrane z jego stosu pogrzebowego. A po drugie, że w Syrakuzach dziś grób, pokazywany jako grób Archimedesa (koło fortu Euryleos), na pewno jego grobem nie jest. Jest to anonimowy, wykuty w skale, późnorzymski grób o doryckiej fasadzie.

Wniosek. Grób Archimedesa z kulą i cylindrem nie jest legendą, istniał naprawdę i to przez długi okres czasu. Wiemy, jak wyglądał. Natomiast można mieć wątpliwości co do tego, kto go wystawił.

8. Urządzenia wojskowe

Teksty starożytne chcą, by Archimedes był wielkim konstruktorem urządzeń wojskowych i to działającym właśnie w czasie oblężenia Syrakuz. Jeśli jednak przeczyta się uważnie zarówno tekst Polibiusza, jak i Liwiusza, to wbrew spotykanej opinii nie zostały one wytworzone wedle projektów Archimedesa dopiero w czasie oblężenia. Istniały one bowiem od jego początku. A ponadto były znacznie skromniejsze i na pewno mniej skuteczne, niż chce tego legenda.

I tak Polibiusz dokładnie opisuje rzymskie „sambukos" (patrz *Dzieje*, VIII, 6, [27] lub [28, str. 371–372]) – były to specjalne drabiny szturmowe, które ustawiane na statkach umożliwiać miały wejście na mury obronne od strony morza. Ale okazały się one mało skuteczne: niszczono je zrzucając na nie z murów Syrakuz (przygotowane zawczasu przez poprzednie 100 lat!) kamienie i ciężary z ołowiu. Te kamienie i ciężary były – jakbyśmy dziś powiedzieli – klasycznymi konwencjonalnymi środkami obronnymi. Ponadto Archimedes miał wymyślić i wprowadzić w użycie jakąś niekonwencjonalną (?) „żelazną rękę" – niestety nie jest ona przez niego opisana. Tą „ręką" łapano dzioby okrętów i najpierw podniósłszy je do góry, podciągając „rękę", puszczano. Wtedy statki, obsuwając się, albo topiły się, albo też przewracały. Ten opis jest prawdopodobny, gdyż do ataku na mury od strony morza (wbrew opinii Liwiusza – patrz niżej) chyba raczej używano małych okrętów – duże trzy- czy pięciorzędowce chyba nie byłyby w stanie (ze względu na zanurzenie) podpłynąć dostatecznie blisko do murów, a ponadto były za mało zwrotne. Taki mały okręt podniesiony choćby o kilkadziesiąt centymetrów, a potem puszczony wolno mógł łatwo mieć przebite dno przez przybrzeżne kamienie. Też chyba nie było rzeczą zbyt trudną przewrócić prawdopodobnie przeładowany wojskiem i sprzętem taki mały okręcik. Uderzającą rzeczą, że w opisie Polibiusza nie ma mowy o tym, jakoby taka „żelazna ręka" (zawieszona na linie czy linach) miała być poruszana jakąś dźwignią czy inną maszyną prostą (na przykład, wielokrążkiem).

Te opisane urządzenia miały spowodować, że zawiódł początkowy atak na Achradinę.

Ale zawiódł takiż atak na Hexapylon. W umieszczonych na nietypowej wysokości otworach strzelniczych umieszczone były „skorpiony", czyli duże, starożytne kusze. Razem ze zwykłymi łucznikami zadały one tak duże straty oblegającym, że Rzymianie musieli zrezygnować ze szturmu. Wedle Polibiusza to nietypowe rozmieszczenie otworów strzelniczych było też pomysłem Archimedesa (ale musiał on być zrealizowany na długo przed początkiem oblężenia).

Ten cały opis Polibiusza jest trzeźwy i przekonywający: nie ma w nim jakiejś cudownej „Wunderwaffe" stworzonej przez Archimedesa. Wszystko, co jest tam podane, mieści się w zakresie (znanych nam) możliwości wojennej techniki starożytności. A ponadto było pisane tylko mniej więcej 50 lat po samych wydarzeniach. I to było pisane przez kogoś, który na wojnie i jej technice znał się dobrze (i który sam stwierdzał, że pisze dokładnie tylko o tych sprawach wojennych, na których się zna).

Znacznie późniejszy opis Liwiusza jest też trzeźwy. Twierdzi on wprawdzie, że owe drabiny „sambucos" były ustawiane na pięciorzędowcach, ale nie mamy żadnych źródeł, które by to wykluczały. Natomiast opisuje bardzo dokładnie ową „żelazną rękę" Polibiusza (acz tej nazwy nie stosuje). Według niego, był to żelazny hak zawieszony na linie (czy linach), którym łapano przód okrętu, gdy podpłynął on tuż pod mur obronny. Po czym dźwignią umieszczoną na koronie muru i obciążoną z drugiej strony wielkim ciężarem nieco okręt podnoszono. Wreszcie szybko odczepiano ciężar i okręt opadał. Jak Liwiusz pisze skromnie, *czasem* uderzywszy o przybrzeżne kamienie, ulegał on uszkodzeniu. Liwiusz wspomina też o nietypowym (dla owych czasów), a zaprojektowanym przez Archimedesa niskim rozmieszczeniu otworów strzelniczych dla skorpionów.

To wszystko jest też bardzo prawdopodobne. Dopiero teksty Plutarcha w *Żywocie Marcellusa* (a więc pisane koło +100 roku) trącą „science-fiction". Plutarch chce, by Archimedes był wielkim konstruktorem wojskowym, który konstruował cudowne, nigdy przedtem ani potem nie spotykane wojskowe urządzenia mechaniczne. Prawdopodobnie miało to tłumaczyć, dlaczego oblężenie Syrakuz przez Marcellusa trwało tak długo.

Wedle Plutarcha Archimedes miał w czasie oblężenia Syrakuz skonstruować jakieś urządzenia oparte na zasadzie dźwigni, które podpływające statki Rzymian wyciągały z wody i rozbijały. Prawdą jest, że Archimedes zajmował się wiele teorią maszyn prostych, w szczególności dźwigni, ale przecież budowa dostatecznie długich i dostatecznie mocnych wysięgników przekraczała możliwości techniczne starożytnych. Przypisuje się Archimedesowi powiedzenie

„dajcie mi punkt oparcia, a poruszę z posad Ziemię”[9], ale przecież do poruszenia Ziemi potrzebny by był nie tylko punkt oparcia, ale też i odpowiednia dźwignia... Zresztą przeciw istnieniu takich urządzeń można wysunąć jeszcze dalsze argumenty. Jak wielkiej mocy (niedostępnej w starożytności) musiałoby wymagać poruszanie takich urządzeń? I ile by ich być musiało!

Oczywiście nie można wykluczyć, że jakieś – znacznie skromniejsze (choćby wzmiankowaną wyżej „żelazną rękę”) – urządzenia wojskowe Archimedes mógł rzeczywiście opracować, czy to przed oblężeniem, czy też dopiero w czasie jego trwania. Ostatecznie Archimedes, jak się zdaje, był wynalazcą tak zwanej (obecnie) „śruby Archimedesa” (do dziś używanej do specjalnych celów pompy). Wykonał też czy raczej zaprojektował „horologium”, które także widział jeszcze osobiście Cycero (miało być przywiezione do Rzymu jako łup przez Marcellusa). Był to rodzaj poruszającego się planetarium. Mógł więc też mieć na swym koncie i jakieś wynalazki czy konstrukcje wojskowe.

Jak już wiemy, pierwsza nieudana próba zdobycia miasta spowodowała, że oblężenie zaczęło się „ślimaczyć”. Rzymianie oblegali Syrakuzy aż trzy lata. Było to jedno z najdłuższych oblężeń, jakie oni w ogóle prowadzili (poza dziesięcioletnim – prawie zupełnie legendarnym – oblężeniem Wejów, które *nota bene* miało wedle opisów mieć raczej charakter nie oblężenia, lecz przerywanej od czasu do czasu blokady miasta). Dlatego też chcieli zrzucić odium za swe niepowodzenia na jakiegoś kozła ofiarnego. I dlatego rozsiewali pogłoski, że „wszystko to jest przez jednego starca...” (Polibiusz, *Dzieje*, VIII, 9, [27] lub [28, str. 373]). Plutarch zaś – by nie rzucać cienia na uwielbianego przez siebie Marcellusa – każe Archimedesowi konstruować coraz bardziej wyrafinowane i coraz straszniejsze urządzenia, na sam widok których rzymscy żołnierze uciekali w popłochu.

Naprawdę przeszkód w zdobyciu Syrakuz było kilka. Po pierwsze, był możliwy dowóz żywności (dlatego Rzymianie zakazali potem mieszkać Grekom na wyspie Ortygii). Po drugie, miasto miało dużo ludności i liczny garnizon (który bał się o swój los w razie zdobycia miasta przez Rzymian). Po trzecie, w oblężeniu była przerwa: wojska rzymskie odstąpiły od miasta, by bronić się przed idącym mu na pomoc siłom kartagińskim. Po czwarte, miasto miało wspaniałe mury. Ostatecznie – jak wiemy – miasto zdobyto dzięki przypadkowi. Oczywistą jest rzeczą, że w tych warunkach zarówno dowództwo wojsk rzym-

[9] Implicite, wynikałoby stąd, że Archimedes wierzył w starożytny obraz Wszechświata. Jest to absolutna przestrzeń, w niej, w „środku” leży Ziemia, która jest więc czymś najtrudniejszym (niemożliwym?) do poruszenia. Ale skoro przestrzeń jest absolutna, to w jakimś danym punkcie można by umieścić punkt podparcia dźwigni, która ruszyłaby nawet Ziemię z jej uprzywilejowanego, środkowego punktu Wszechświata. Tej interpretacji przeczy zresztą przekazana nam inna wersja tej wypowiedzi: „... dajcie mi drugą Ziemię, a...”

skich, jak i prości żołnierze (a także opisujący te zdarzenia starożytni historycy) usiłowali w jakiś sposób usprawiedliwić długi czas trwania oblężenia. Na tym tle mogło też powstać ewentualne zarządzenie (może od razu wydane przez rozwścieczonych Rzymian) egzekucji elity miasta. Mogły na tym tle powstać też (niewiele później czy też nawet wiele lat potem) historyjki o różnych „Wunderwaffe" obmyśliwanych przez Archimedesa i wzbudzających postrach wśród Rzymian. Zresztą, gdyby te konstrukcje Archimedesa były aż tak rewelacyjne, to dlaczego sami Rzymianie ich nie skopiowali?

Przy okazji zauważmy, że niezależnie od tego, czy historia o dźwigniach niszczących okręty jest prawdziwa, czy też nie, pozostaje ona w sprzeczności ze wzmiankowanymi opiniami o roztargnieniu i „nieżyciowości" Archimedesa. Jak mogli ci sami autorzy opisywać nieżyciowość Archimedesa i jego działalność techniczną (rzekomą i prawdziwą)? Wszystko to było oparte na uwielbianych w dawnych wiekach anegdotkach o wielkich ludziach: anegdotki te – czasem zbliżone do prawdy, ale na ogół zupełnie się z nią mijające – miały czasem jakąś (niepewną) podstawę, ale najczęściej były tylko literackimi wymysłami.

Wniosek. Archimedes miał wprawdzie, jak się zdaje, na swym koncie osiągnięcia techniczne (może nawet mające wojskowe zastosowania), ale jego cudowne machiny (działające na zasadzie dźwigni), które niszczyły skutecznie okręty rzymskie, należą tylko do legendy.

9. Lustra

Ale nim okręty miały się zbliżyć do brzegu na odległość wysięgników niszczących je, to już miały być palone za pomocą promieni słonecznych, odbitych w odpowiednich zwierciadłach (czy soczewkach)... I to też miało być ostatecznym argumentem, który zmusił Rzymian do bezpośredniego szturmu miasta.

Nie doszły do nas żadne pisma optyczne samego Archimedesa. Wiemy jednak, że przynajmniej jedno takie pismo istniało: *Katoptrika*. Ale już starożytni twierdzili, że nie zawierało ono (czy one, a także i pisma mechaniczne) żadnych opisów urządzeń praktycznych. Bowiem Archimedes – jako prawdziwy w pojęciu starożytnych uczony (wedle Plutarcha – patrz *Życie Marcellusa*) – miał redagować na piśmie tylko prace naukowe, zaś osiągnięcia praktyczne (służące uzyskaniu zysku) takiego redagowania nie były godne.

Najstarsza wiadomość o stosowaniu przez Archimedesa „broni optycznej" zachowała się u Luciana (Syryjczyka, żyjącego w II wieku AD – patrz [21]). Zabawne jest, że znany nam już Zonaras w swych *Annales* (patrz XIV, 3 w [43]

lub [44]) przypisuje pierwsze zastosowanie takich urządzeń komu innemu, a mianowicie dopiero Proclusowi (V wiek AD). Ciekawą jest rzeczą, że okresem największego „podrzucania" Archimedesowi konstrukcji wojskowych zwierciadeł jest nowożytny okres nowego zainteresowania optyką, to jest XVII i XVIII wiek AD. Zresztą do dziś – jak się zdaje – nie istnieją wojskowe operacyjne bronie optyczne.

Takie wojskowe urządzenie złożone z jednego wklęsłego lustra (lub soczewki) musiałoby leżeć niemal na linii okręt – Słońce, co jest niemożliwe do wykonania. Należałoby więc dodać celostat (płaskie zwierciadło skierowujące odpowiednio promienie). Na to, by zapalić okręt, urządzenie musiałoby mieć odpowiednio dużą światłosiłę, co przy kilkusetmetrowej odległości od okrętu dawałyby olbrzymie lustra lub soczewki. Do dziś nie na mowy o tak dużych soczewkach. Wobec małego współczynnika odbicia światła przez brąz (szczególnie że byłoby konieczne jeszcze dodatkowe odbicie o celostat) zwierciadła musiałyby mieć co najmniej kilkudziesięciometrową średnicę. Do tego trzeba by je poruszać. Samo poruszanie takich olbrzymów nie byłoby możliwe w starożytności, a ponadto dochodziłaby synchronizacja (4 stopnie swobody!) tych ruchów, możliwa dopiero obecnie przy użyciu komputerów.

Wniosek. Tak jak wojenne maszyny niszczące, oparte na zasadzie dźwigni, tak i lustra Archimedesa służące do podpalania okrętów należą do tworów legendarnych.

10. Eureka

Chyba nie warto specjalnie zajmować się innymi legendami na temat Archimedesa. Na przykład legendą o $\epsilon\upsilon\rho\eta\kappa\alpha$, $\epsilon\upsilon\rho\eta\kappa\alpha$ („Eureka! Eureka!" = Znalazłem! Znalazłem!) – miała ona popierać pogląd o jego roztargnieniu. Występuje ona po raz pierwszy dopiero u Witruwiusza (patrz [35] lub [36, ks. IX, ust. 3]). A więc dopiero w końcu I wieku a.Ch.n.

11. Zakończenie

Ostateczny wniosek jest prosty. W encyklopediach winna się znajdować wzmianka (mało – ale istotnie – różna od tekstów dotychczasowych):

> ARCHIMEDES – najwybitniejszy fizyk i matematyk starożytności; twórca statyki i hydrostatyki; wynalazca techniczny. Żył i działał w Syrakuzach na Sycylii (urodzony w I połowie III wieku a.Ch.n. – zginął po zdobyciu Syrakuz, to jest w okresie 213 – 209 a.Ch.n.).

Natomiast obszerniejsze teksty o Archimedesie winny być wyraźnie różne od obecnie spotykanych. Powinno by być w nich powiedziane, że zginął on albo przypadkowo w czasie rabunku Syrakuz po ich zdobyciu przez Rzymian, albo też – co jest prawdopodobniejsze – w czasie świadomego wymordowywania elity Syrakuz przez ich zdobywców. Że miał grób, którego pomysł był wykorzystany przy budowie grobu C. F. Gaussa. Ponadto można by dodać, że był on jednym z nielicznych starożytnych, którego dzieło jest żywe do dnia dzisiejszego.

Wreszcie, w jeszcze dłuższych tekstach już można by wspominać, że o Archimedesie w starożytności i w średniowieczu krążyło wiele legendarnych historyjek: o jego ostatnich słowach przedśmiertnych, o cudownych konstrukcjach wojennych (opartych na prawach dźwigni i na prawach optyki, którymi się Archimedes teoretycznie zajmował, ale które w starożytności nie były technicznie realizowalne). Historyjki takie uwielbiano w przeszłości (szczególnie w średniowieczu – patrz – choćby *Złota legenda* Jakuba de Voragine [37]), ale nie mają one wiele wspólnego z rzeczywistością.

Omówiliśmy legendy (liczne) i prawdę (jedyną) życia i działania Archimedesa. Ale co to jest legenda? Legendą jest to, co się wprawdzie powtarza (ustnie, na piśmie), ale co się nie zdarzyło (na przykład – konstrukcja przez Archimedesa zwierciadeł zapalających statki). Co zaś jest prawdą? Tu odpowiedź nie jest taka prosta. Co innego znaczy, że coś jest prawdą na terenie teologii, co innego na terenie matematyki, co innego fizyki czy chemii, a jeszcze czym innym na terenie historii. Na terenie historii prawda jest tylko czymś zrelatywizowanym do zachowanych źródeł oraz do oceny ich wiarygodności. O ile fakt zachowania się pewnych źródeł (które wszystkie powinno się, a nawet musi się uwzględniać) jest faktem w pewnym sensie obiektywnym, o tyle ich ocena jest (i będzie) zawsze czymś subiektywnym. I to tyczy się zarówno faktów, które explicite znajdujemy w źródłach (jak na przykład fakt, że Archimedes miał nagrobek z wyobrażoną kulą i cylindrem), jak i tych, które wprawdzie w zachowanych źródłach w sposób wyraźny nie występują, ale o których istnieniu możemy wywnioskować na ich podstawie (jak na przykład fakt, że, być może, miała miejsce świadoma egzekucja Archimedesa). Prawdopodobieństwo zajścia tych faktów może być bardzo duże (jak w wypadku nagrobka), ale może też być znacznie mniejsze (jak w wypadku egzekucji). Przy czym ocena tego prawdopodobieństwa jest czysto subiektywna (na przykład – może ona wynikać z naszej oceny prawdomówności Polibiusza i Plutarcha). Dlatego wyżej wysuwałem też i liczne argumenty zdroworozsądkowe, przemawiające przeciw istnieniu pewnych urządzeń czy faktów.

Chciałbym zaznaczyć wyraźnie, że nie podważam ustaleń wielu pokoleń historyków, tyczących się daty zdobycia Syrakuz przez Rzymian. Historycy do-

skonale zdają sobie sprawę, że podawane przez nich „dokładne" daty obarczone są – często – jednak sporą niepewnością. Nie uwidaczniają tego jednak w swoich zapisach. Używają natomiast czasu o innym przebiegu niż czas fizyczny (astronomiczny). Jego przebieg jest tak dobrany, by z jednej strony otrzymywać najprawdopodobniejsze daty zdarzeń, a z drugiej, by długość krótkich przedziałów czasu była obarczona możliwie małym błędem (to jest, by była możliwie zgodna z naszymi źródłami i ze zdrowym rozsądkiem). Nie jest to wybór obiektywny, dlatego różni autorzy mogą podawać różne daty tych samych zdarzeń.

Przedstawimy rzecz w matematycznej postaci. Daty (roczne) starożytne (i częściowo średniowieczne) winne być podawane w dobrze znanej wszystkim matematykom i fizykom postaci $d \pm \varepsilon$, gdzie ε wynosi parę lat, kilkanaście lat (Egipt) lub nawet kilkadziesiąt czy nawet więcej (Mezopotamia) lat (jeszcze dokładniejsze byłoby podawanie rozkładu prawdopodobieństwa, że dana data jest prawdziwa – taki rozkład mógłby być nawet asymetryczny). Taki zapis nie jest jednak wygodny i nic zawiera wszystkich informacji, które powinien zawierać. Na przykład – przy takim zapisie – nie wiedzielibyśmy, czy na pewno wcześniej nastąpiło zdobycie Syrakuz (-209 ± 3), czy też bitwa nad Metaurem (-206 ± 2). l dlatego historycy stosują – naprawdę – nie fizyczny (astronomiczny) czas x, lecz swój czas „historyczny" $y = x + \eta(x)$, gdzie η jest funkcją niekoniecznie ciągłą, rosnącą i „małą", to jest taką, że $|\eta(x)| < \varepsilon$. Przy takim sposobie zapisu (na ogół) nie mamy już wątpliwości, co było wcześniej: zdobycie Syrakuz, czy też bitwa nad Metaurem. Częściej zresztą poszczególni historycy – przyjmując dodatkowo różne hipotezy za pewne – zamiast funkcji η stosują indywidualne funkcje η_0, jeszcze „mniejsze" niż η, to jest takie, że $|\eta_0(x)| < \varepsilon_0$ oraz $\varepsilon_0 < \varepsilon$.

Nie podważam ustaleń historyków, ale jako matematyk wolę mieć wyraźnie powiedziane, co jest pewne, co jest tylko prawdopodobne, a co tylko jest produktem fantazji. I dlatego też zamiast posługiwać się czasem „historycznym", starałem się „wyłuskiwać" z zachowanych źródeł granice lat „fizycznych" („astronomicznych"), w których na pewno (a raczej *prawdopodobnie* na pewno) zdarzyły się omawiane wypadki.

Źródła starożytne, które są przetłumaczone na język polski, są podawane tylko w jednym z tłumaczeń (jeśli takie istnieje lub takie istnieją). Wobec często dużej ilości wydań oryginałów ewentualny Czytelnik i tak sięgnie do tych wydań, które są dostępne w bibliotece, z której zwykle korzysta. Podaje się więc w odnośnikach nie strony, lecz księgi i ich ustępy (wedle klasycznych podziałów), tak że Czytelnik bez trudu będzie mógł znaleźć odpowiednie miejsca w oryginałach.

Bibliografia

[1] K. Aland, M. Black, C. M. Martini, B. M. Metzger, A. Wikgren, *The Greek New Testament*, wyd. 3, Stuttgart 1975.

[2] Archimedes, *Opera Omnia cum commentaris Eutocii*, J. L. Heiberg, Leipzig, t. I – 1910, t. II – 1880, t. III – 1881.

[3] Archimedes, *Works, with a supplement "The Method of Archimedes"* (T. L. Heath, red.), Heiberg, New York 1954 (fotograficzny przedruk wydania z 1897 roku i Supplementu z 1912 roku).

[4] M. Bogucka, *Staropolskie obyczaje w XVI–XVII wieku*, Państwowy Instytut Wydawniczy, Warszawa 1994.

[5] M. T. Cicero, *Ciceronis Tusculanarum disputationes libri*, t. V, Leipzig 1880.

[6] M. T. Cicero, *Księgi Akademickie. O najwyższym dobrze i źle. Paradoksy stoików. Rozmowy tuskulańskie*, tłum. W. Kornatowicz, J. Śmigaj, PWN, Warszawa 1961.

[7] H. Dieter, R. Günter, *Römische Geschichte*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1981.

[8] Dio Cassius Cocceianus, *Historia Romana* (L. Dindorf, red.), t. 3, recognovit Melber, I., Leipzig 1890.

[9] Kasjusz Dion Kokcejan, *Historia Rzymska*, tłum. W. Mandyta, Ossolineum, Wrocław 1967.

[10] Diodorus, *Diodori bibliotheca historica* (F. Vogel, C. Th. Fisher, red.), t. I–V, Leipzig 1886.

[11] J. Froissart, *Les Chroniques* (J. A. C. Buchon, red.), t. 3, Paris 1837.

[12] T. L. Heath, B. L. van der Waerden, *Archimedes*, [w:] *Encyclopædia Britannica*, t. II, Oxford 1964.

[13] M. Jaczynowska, *Historia starożytnego Rzymu*, PWN, Warszawa 1974.

[14] M. Jaczynowska, *Historia starożytnego Rzymu*, wyd. 2, PWN, Warszawa 1976.

[15] O. Jurewicz, *Historia literatury bizantyńskiej*, Ossolineum, Wrocław 1984.

[16] A. Krawczuk, *Kronika starożytnego Rzymu*, Iskry, Warszawa 1994.

[17] Livius Titus [C.], *Ab urbe condita libri XXI–XXXII*, R. Ganszyniec, Lwów 1939.

[18] Livius Titus [C.], *Ab urbe condita libri XXI–XXXIII*, ed. secunda (G. Weissenborn, red.), M. Mueller, Leipzig 1915.

[19] Livius Titus [C.], *Ab urbe condita libri XXIV–XXX*, ed. secunda (G. Weissenborn, red.), M. Mueller, Leipzig 1900.

[20] Liwiusz, *Dzieje Rzymu od założenia Miasta. Księgi XXI–XXVII*, tłum. M. Brożek, Ossolineum, Wrocław 1954.

[21] Lucian, *Luciani Samosalensi Opera*, t. 3, Leipzig 1904.

[22] A. Pauly, G. Wissowa i inni, *Real-Encyclopädie der Classischen Altertumswissenschaft*, t. 3, Stuttgart 1899.

[23] A. Pauly, G. Wissowa, W. Krol, K. Mittelhaus i inni, *Real-Encyclopädie der Classischen Altertumswissenschaft*, Halbband 14, Stuttgart 1948.

[24] Plutarchus, *Vitae*, t. III, München 1841.

[25] Plutarchus, *Plutarchii vitae parallele*, t. 15, Leipzig 1933.
[26] Plutarchus, *La vie des hommes illustrés*, tłum. J. Amyot, t. III, Paris an IX 1801.
[27] Polybius, *Historicae* (L. Dindorf, red.), t. 5, Leipzig 1889.
[28] Polibiusz, *Dzieje*, tłum. S. Hammer, t. I, Ossolineum, Wrocław 1957.
[29] G. Sarton, *A History of Science – Hellenistic Science and Culture in the last three Centuries B.C.*, Cambridge 1959.
[30] Tukidydes, *Thucididis de bello Peloponesiaco libri octo* (G. Boehme, red.), Leipzig 1854 (t. I), 1855 (t. II).
[31] Tukidydes, *Wojna Peloponeska*, tłum. K. Kumaniecki, Czytelnik, Warszawa 1953.
[32] I. Tzetzes, *Epistolae* (P. A. M. Leone, red.), Leipzig 1972.
[33] I. Tzetzes, *Historiarum Variarum Chiliades (Βιβλιον Ισ τορικησ τησ δια Στιχων Πολιτικων)* (Th. Kisslingius, red.), Leipzig 1826 (istnieje przedruk fotograficzny z roku 1963).
[34] Valerius Maximus, *Valerii Maximi Factorum et. dictorum memorabilis libri nevem* (C. Kempf, red.), Leipzig 1888.
[35] Vitruvius (M. Vitruvius Pollio), *De architectura libri decem* (F. Krohn, red.), Leipzig 1912.
[36] Vitruvius (Witruwiusz Pollio), *O architekturze ksiąg dziesięć*, tłum. K. Kumaniecki, PWN, Warszawa 1956.
[37] J. de Voragine, *Złota legenda. Poczet 1*, tłum. L. Staff, Wydaw. Jakuba Mortkowicza, Warszawa 1922.
[38] B. L. van der Waerden, *Science Awaking*, P. Noordhoff, Groningen 1954.
[39] B. L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, Birkhäuser, Basel 1956.
[40] Z. Wdowiszewski, *Genealogia Jagiellonów*, PAX, Warszawa 1968.
[41] L. Winniczuk, *Kalendarz starożytnych Greków i Rzymian*, Ministerstwo Szkół Wyższych i Nauki, Warszawa 1951.
[42] F. Winter, *Der tod des Archimedes*, Winckelmannsprogramm der Archäolog. Ges. zu Berlin, t. 82, W. de Gruyter, Berlin 1924.
[43] J. Zonaras, *Ioannis Zonarae Epitome historiarum (Ιοαννου του Ζοναρα Επιτομε Ισ τοριον)* (L. Dindorf, red.), t. 6, Leipzig 1868.
[44] J. Zonaras, *Ioannis Zonarae annales* (M. Pinden, red.), Bonn 1841 (t. I), 1844 (t. II), 1897 (t. III).

Krzysztof Tatarkiewicz
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Wiad. Mat. 56 (1) 2020, 89–102
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Roman Urban (Wrocław)

Andriej Nikołajewicz Kołmogorow – humanista

1. Wstęp

Radziecki matematyk Andriej N. Kołmogorow (1903–1987) był jednym z najwybitniejszych matematyków XX wieku, a w pewnym okresie, według słów Władimira A. Uspienskiego, być może nawet największym. W 1933 roku Kołmogorow opublikował fundamentalne dzieło [9], w którym teoria prawdopodobieństwa, do tego czasu pojmowana dość intuicyjnie, została ujęta jako nowoczesna teoria aksjomatyczna[1]. Kołmogorow uzyskał doniosłe rezultaty w wielu dziedzinach matematyki, m.in. w teorii układów dynamicznych, topologii, logice intuicjonistycznej, mechanice klasycznej, teorii informacji, probabilistyce. Ten dalece niekompletny spis pokazuje, jak różnorodne były zainteresowania matematyczne Kołmogorowa. O doniosłości wyników otrzymanych przez niego niech świadczy to, że choć napisał dosłownie kilka prac z logiki matematycznej, były to prace przełomowe (zob. na przykład [10]). Dziś wyniki uzyskane przez Kołmogorowa uważane są przez logików za klasyczne i są nadal cytowane.

Logika oraz refleksja nad istotą matematyki, jej historią i filozofią zajmowały Kołmogorowa (zob. [36]). Historia i filozofia matematyki są na pograniczu nauk ścisłych i humanistycznych. Zajmował się nimi – był człowiekiem o niesłychanie bogatych zainteresowaniach humanistycznych. Interesował się literaturą piękną, poezją, muzyką i historią, a jego zainteresowania często przeradzały się w badania w dziedzinie nauk humanistycznych. Jeszcze jako student napisał pracę historyczną [13] będącą wynikiem jego studiów, z zastosowaniem statysty-

[1] Po rosyjsku dzieło to ukazało się trzy lata później, zob. [11].

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

ki matematycznej, nad księgami katastralnymi ziemi nowogrodzkiej od końca XV do początku XVI wieku.

Później, w latach sześćdziesiątych XX wieku, zajmował się lingwistyką matematyczną. Interesował się także teorią wiersza z punktu widzenia matematyka i językoznawcy. Rezultatem jego badań w tej dziedzinie jest dwanaście prac, zarówno samodzielnych, jak i we współpracy z Aleksandrem M. Kondratowem i Aleksandrem W. Prochorowem.

2. Kołmogorow jako historyk

Kołmogorow swoją pierwszą pracę naukową zaczął pisać, gdy miał siedemnaście lat. Był wówczas studentem Wydziału Matematycznego Uniwersytetu Moskiewskiego. Praca dotyczyła historii piętnastowiecznego Nowogrodu. Otrzymane wyniki przedstawił na seminarium prowadzonym przez historyka Siergieja W. Bachruszyna. Kołmogorow opowiadał swoim uczniom, że ten jego pierwszy występ na seminarium historycznym był zarazem końcem jego „kariery" historyka. Bachruszyn pochwalił pracę, zaznaczył jednak, że nie może być ona uznana za zakończoną, ponieważ w naukach historycznych każda teza wymaga przynajmniej kilku uzasadnień. Opowiadając o tym wydarzeniu, Kołmogorow na koniec dodawał, że w tej sytuacji postanowił zająć się nauką, w której dla udowodnienia tezy wystarczy jeden dowód.

Przypuszczano, że praca Kołmogorowa się nie zachowała, jednak po śmierci autora znaleziono ją w jego archiwum (zob. [7, str. 189]) i została opublikowana pośmiertnie (zob. [13]). Praca została bardzo wysoko oceniona przez specjalistów, w szczególności przez kierującego nowogrodzką ekspedycją archeologiczną Walentina Ł. Janina (zob. [33, str. 5]). Zachowały się cztery rękopisy pracy. Praca nad artykułem trwała od listopada 1920 roku do stycznia 1922 roku (zob. [7, str. 189]).

Kołmogorow studiował księgi katastralne (ros. *piscowyje knigi*) z końca XV i początku XVI wieku w celu rekonstrukcji historii ekonomicznej Nowogrodu. Był to okres tworzenia przez Moskwę ruskiej państwowości. Badanie ksiąg katastralnych zaczęło się w latach czterdziestych XIX wieku, Kołmogorow miał zatem do dyspozycji zarówno księgi, jak i opracowania dokonane przez historyków. Z opracowań Kołmogorow szczególnie cenił sobie historyczno-geograficzny aspekt prac Konstantina A. Niewolina (1806–1855) i Aleksandra M. Andrijaszewa (1863–1933). Jednak do większości historyków studiujących księgi katastralne miał zastrzeżenia natury metodologicznej. Krytykował na przykład Wasyla O. Kluczewskiego, Iwana D. Bieljajewa oraz Wasyla I. Siergiejewicza za używanie faktów wziętych z różnych rejonów geograficznych Rosji dla uza-

sadnienia tez mających zachodzić w określonym z góry obszarze, Aleksandra N. Nikitskiego za wnioskowanie z niepowiązanych ze sobą faktów, a Borysa D. Grekowa za używanie materiałów późniejszych do rekonstrukcji sytuacji wcześniejszej i przy tym diametralnie innej.

W badaniu ksiąg katastralnych Kołmogorow napotkał wiele trudności, choćby tak banalnych, jak braki w księgach. Ponadto na ziemi nowogrodzkiej, z racji jej dużej powierzchni i geograficznego zróżnicowania, prowadzono różnego rodzaju gospodarstwa, a gęstość zaludnienia była silnie niejednorodna. Jednym z konkretnych problemów było określenie, co rozumie się pod określeniem liczby ludzi w dworach. Praca Kołmogorowa składa się z dwóch części. Pierwsza oparta jest głównie na klasycznej metodologii stosowanej w pracach historycznych, którą Kołmogorow przyswoił sobie w najwyższym stopniu.

Jakkolwiek Kołmogorow nie uniknął pewnych nieścisłości w pierwszej części, to, jak podkreśla Janin, wyniknęły one z ogólnie przyjętych i szeroko uznawanych przez historyków w tym okresie faktów dotyczących badanej epoki. Jednocześnie nieścisłości te znajdują się na peryferiach wywodów Kołmogorowa i w żadnym stopniu nie mogą podważać istoty jego pracy i wniosków, które otrzymał (zob. [7, str. 194]).

W drugiej części Kołmogorow z historyka staje się matematykiem. Jako podstawową metodę badawczą przyjął rachunek prawdopodobieństwa, który nie był dotąd stosowany do rozwiązywania problemów koncentracji ludności w rejonach ziemi nowogrodzkiej. Udało mu się wykazać, że pogląd Gniewuszewa o przyczynach zróżnicowania w administracyjno-terytorialnych jednostkach – *pogostach* ziemi nowogrodzkiej jest błędny. Nie wynikają one z rozwoju wytwórczości, a przygranicznego położenia bardziej zaludnionych jednostek administracyjnych (zob. [7, str. 193]).

Odnośnie do trudniejszego problemu – określenia, co kryje się pod pojęciem *ludi* (pol. ludzie) w księgach katastralnych ziemi nowogrodzkiej – Kołmogorow doszedł do interesujących wniosków. Odrzucił dotychczasowe poglądy historyków, że liczba *ludi* obejmowała, w zasadzie, całą pracującą ludność. Twierdzenie to było uzasadniane zestawianiem liczby *ludi* w majątku z powierzchnią ziemi, która była uprawiana. Jednak wzrost powierzchni ziemi uprawnej nie był proporcjonalny do wzrostu liczby *ludi* (zob. [7, str. 193]).

Księgi katastralne Nowogrodu były oczywiście badane także później. Janin wymienia na przykład trzytomową pracę zbiorową [23] z lat 1971–1978 pod redakcją Aleksandra L. Szapiro. Jednakże, co podkreśla Janin, wszyscy historycy stosowali klasyczne metody badawcze i nie stosowali nauk ścisłych. Niestety praca Kołmogorowa nie była znana. Janin stwierdza, że gdyby wydano ją zaraz

po napisaniu, to nasza dzisiejsza wiedza byłaby pełniejsza i bardziej precyzyjna z powodu zastosowania metod matematycznych.

Pracę Kołmogorowa w postaci oddzielnej książki [13] wydano w 1994 roku, a więc sześć lat po ukazaniu się artykułu Janina.

3. Strukturalizm i cybernetyka

Podstawy cybernetyki zawiera klasyczna książka Norberta Wienera [34], która ukazała się w 1948 roku.

W ZSRR cybernetyka była, w odróżnieniu od Zachodu, czymś więcej niż jedną z nowych dziedzin nauk ścisłych. Była podobna do nieformalnego ruchu, kierunku, i wreszcie filozofii, która ogarnęła sobą także humanistykę (zob. [29, str. 92]). Chociaż za czasów Stalina nauka radziecka miała się w zasadzie bardzo dobrze i uczeni dysponowali dużymi sumami pieniędzy na badania (zob. [3, str. 5]), to jednak cybernetyka była tu wyjątkiem. Uważana była bowiem za naukę burżuazyjną. Bez wątpienia szkodziły jej także „popularnonaukowe" artykuły, niezwykle powierzchowne i straszące przeciętnych ludzi możliwością tworzenia prawdziwych dzieł sztuki przez maszyny, a także skonstruowaniem „myślącej maszyny" (zob. [18, str. 28]). Z tego względu rozwój cybernetyki w ZSRR rozpoczął się z dużym opóźnieniem.

Cybernetyka wywodzi się ze strukturalizmu. Podstawy pod radziecki strukturalizm położone zostały przez młodych uczonych i studentów, których (pierwotnie obraźliwie) nazywano formalistami. W latach 1915 i 1916 powstały dwie grupy skupiające formalistów. W Moskwie, z inicjatywy Romana Jakobsona, założone zostało w 1915 roku Moskiewskie Koło Lingwistyczne. Grupa działała do 1924 roku. Jej głównym zainteresowaniem badawczym był język i językowe podejście do badania literatury i folkloru.

Natomiast w Sankt Petersburgu w latach 1916–1925 działała grupa formalistów pod nazwą OPOJAZ – Towarzystwo Badania Języka Poetyckiego. Grupa miała nieformalny charakter i nie była zorganizowana hierarchicznie. Do grupy należeli m.in. literaturoznawcy Wiktor B. Szkłowski i Jurij N. Tynianow oraz językoznawcy Jewgienij D. Poliwanow i Lew P. Jakubiński.

Formaliści mieli ogromny wpływ na dalszy rozwój teorii literatury (z punktu widzenia języka) oraz semiotykę. Z tego też powodu prace naukowe formalistów w przeważającej części są pracami strukturalistycznymi.

Druga połowa lat pięćdziesiątych XX wieku była niezwykle owocna dla strukturalizmu. Związane to było z włączeniem się radzieckich uczonych w badania na polu tłumaczenia maszynowego (zob. [26]).

W 1960 roku Kołmogorow napisał swój pierwszy list do swoich współpracowników i uczniów (napisze ich kilka i będą one później funkcjonować w literaturze pod nazwą *Semiotycznych Posłań* [14, 30], zob. też [29]) – wytyczając kierunki badań literatury i sztuki przy użyciu nauk matematycznych, w szczególności metod obiecującej i modnej wówczas cybernetyki (zob. [27]).

Rok 1961 można uznać za oficjalną datę inaugurującą badania strukturalne literatury w ZSRR. Pod koniec września tego roku na Uniwersytecie im. Łomonosowa w Gorkim odbyła się konferencja *Zastosowanie metod matematycznych do studiów nad artystycznym językiem literackim*. Kołmogorow odegrał na konferencji dominującą rolę. Poza trzema odczytami, w których prezentował własne wyniki, wygłosił także wykład otwierający konferencję oraz przemówienie końcowe [20, str. 67].

Kołmogorow był entuzjastą stosowania metod matematycznych do rozwiązywania problemów humanistycznych, o czym także pisał w *Semiotycznych Posłaniach* [30] (zob. także [29]). Uważał, że cybernetyka będzie odpowiednim narzędziem do zrozumienia sztuki, kultury, etyki.

Władza radziecka używała cybernetyki jako narzędzia w badaniach wojskowych i przemyśle zbrojeniowym. Cybernetyka przestała więc być nauką burżuazyjną. W związku z tym nauki humanistyczne, stosujące cybernetykę w swoich badaniach, mogły teraz swobodnie się rozwijać. I tak oto widzimy, jak polityka może mieć wpływ na rozwój nauki (zob. [29, str. 92]).

4. Kołmogorow i metody matematyczne w językoznawstwie oraz literaturoznawstwie

Zainteresowania Kołmogorowa były niezwykle szerokie. Zawsze starał się być na bieżąco z literaturą językoznawczą. Potwierdzeniem niech będzie przypadek Aleksandra E. Kibrika, który ukończył filologię klasyczną na Uniwersytecie Moskiewskim, a pracę dyplomową napisał na temat fonologii eksperymentalnej. Część tej pracy ukazała się w czasopiśmie *Woprosy jazykoznanija*. W kilka tygodni po publikacji Kołmogorow zaprosił Kibrika do wygłoszenia referatu na swoim seminarium (zob. [8, str. 52]).

Zainteresowanie Kołmogorowa podstawami teoretycznymi wiersza można datować na 1943 rok, a więc znacznie wcześniej niż pojawienie się jego pierwszych prac na ten temat. Dnia 28 sierpnia tego roku Kołmogorow wysłał do Kurska, do Jurija M. Smirnowa, list o znamiennym tytule *Uwaga o podstawach teorii wiersza rosyjskiego* (ros. *Zamieczanije ob osnowach russkogo stichosłożenija*). Lektura tego listu pokazje, że Kołmogorow bardzo dobrze znał teoretyczną

książkę Walerija Briusowa *Nauka o wierszu*[2]. Najważniejszą zaś obserwacją zawartą w liście jest to, że tradycyjne i podstawowe pojęcia teorii wiersza są (zbyt) skomplikowane (zob. [15]).

Pisząc na tematy filologiczne, Kołmogorow miał przez cały czas na uwadze potencjalnego czytelnika-filologa. To wymagało innego stylu pisania. W związku z tym starał się unikać częstego używania terminów matematycznych. Nawet pobieżne przejrzenie jego prac filologicznych pozwala na stwierdzenie, że pisał dla uczonych, którym, jak sam twierdził, brak jest zdolności matematycznego myślenia.

4.1. *Definicja kategorii gramatycznej przypadka.* Powstałe z inicjatywy Kołmogorowa pierwsze w ZSRR seminarium poświęcone badaniom problemów lingwistyki matematycznej *Niektóre zastosowania metod matematycznnych w językoznawstwie* posiadało „Dziennik seminarium", w którym zanotowano (zob. [30, str. 298]): „Zajęcia (24 września 1956 r.). [...] Uczestnikom seminarium postawiono problem precyzyjnego określenia pojęcia jambu oraz przypadka gramatycznego." Były to dalece niebanalne problemy. Tak Uspienski w książce [30, str. 298] podsumowuje przyczyny postawienia przez Kołmogorowa takich problemów:

> Odnośnie do pojęcia jambu, przeświadczenie, że w jambicznym wersie akcent pada na parzyste sylaby, było prawie absolutne, wbrew istnieniu wyjątków. Odnośnie do przypadka gramatycznego, po prostu nie istniało nawet błędne jego określenie.

I dalej (zob. [31, str. 13–14]):

> Przypadków w języku rosyjskim jest sześć; tak uczą w szkole, na uniwersytecie jest ich już osiem. W języku niemieckim są cztery, w estońskim – czternaście. Nie jest jednak jasne, czego dokładnie jest sześć czy osiem w rosyjskim, cztery w niemieckim i czternaście w estońskim. Podręczniki akademickie, nie wspominając już o szkolnych, po mistrzowsku unikały (teraz także unikają) tego pytania. Zadanie polegało zatem na tym, żeby precyzyjnie określić byty, których liczba jest podliczana.

A oto jak przedstawia się historia rozwiązania problemu dotyczącego kategorii przypadka. Kołmogorow podzielił się swoimi przemyśleniami na ten temat z Uspienskim we wrześniu 1956 roku. Na seminarium 5 listopada tego roku Uspienski wygłosił referat na temat ścisłego określenia kategorii przypadka gramatycznego według Kołmogorowa.

[2] Taki tytuł podają wszyscy badacze związani z Moskiewskim Kołem Lingwistycznym, chociaż podawany jest także tytuł *Krótki kurs nauki o wierszu*. Książka została wydana w Moskwie w 1918 roku.

Idea Kołmogorowa, którą przekazał Uspienskiemu, zaczyna się od zauważenia, że obiekty mogą znajdować się w różnych stanach. Stan obiektu wyrażany jest za pomocą zdania i przy użyciu rzeczownika jako nazwy obiektu na przykład „kot pije mleko", „nie ma mleka". Jak widzimy, określenie stanu obiektu w danym zdaniu może być wyrażone w różnej formie, mamy bowiem „mleko", „mleka". Dwa stany nazywa się równoważnymi względem danego obiektu, jeżeli do wyrażenia stanów obiektu w obu wypadkach używa się nazwy obiektu w tej samej formie. Weźmy dla przykładu dwa stany: „dany obiekt wrze" oraz „kot pije dany obiekt". Widzimy, że te stany są równoważne względem obiektu „mleko", bowiem mamy „kot pije mleko" oraz „mleko wrze". Stany te nie są jednak równoważne względem obiektu „woda", bowiem wtedy używamy nazwy obiektu w różnych formach dla różnych stanów, tzn. „woda wrze" oraz „kot pije wodę". Dwa stany nazywa się absolutnie równoważnymi, jeżeli są one równoważne względem każdego obiektu, który może znajdować się w tych stanach. Przykładem stanów absolutnie równoważnych są dwa stany: „kot lubi dany obiekt" oraz „pies pije dany obiekt". Zbiór wszystkich stanów rozbija się na wzajemnie rozłączne podzbiory, nazywane klasami równoważności. Te klasy mają tę własność, że dowolne dwa stany należące do tej samej klasy są absolutnie równoważne, natomiast dwa stany z różnych klas nie są absolutnie równoważne. Kołmogorow proponował nazwać te klasy przypadkami. Jakkolwiek jest to opis siłą rzeczy znacznie uproszczony i pojawiają się jeszcze pewne trudności w definicji, nie będziemy wchodzić w detale i odeślemy czytelnika do oryginalnego artykułu [28, str. 1–8] lub pracy [30, str. 291–303], gdzie znajduje się posłowie z marca 2001 roku.

W języku matematycznym powyższa procedura polegała na zdefiniowaniu na zbiorze stanów, w których mogą się znajdować obiekty, odpowiedniej relacji równoważności. Zbiór klas abstrakcji tej relacji odpowiada zbiorowi przypadków.

Wydaje się, że idea Kołmogorowa określenia kategorii przypadka gramatycznego nie jest szerzej znana wśród polskich lingwistów. W każdym razie przegląd podręczników akademickich poświęconych gramatyce języka polskiego pokazuje, że definicja Kołmogorowa nie jest tam cytowana. Definicje większości autorów nie spełniają raczej reguł ścisłości, których wymaga się od definicji. Podobną sytuację można zaobserwować przeglądając rosyjskie (lub rosyjskojęzyczne) podręczniki gramatyki opisowej języka rosyjskiego.

4.2. *Teoria złożoności Kołmogorowa i jej zastosowania w językoznawstwie.* Opierając się na swojej teorii złożoności (nazywanej dziś jego imieniem), Kołmogorow zajął się w latach sześćdziesiątych XX wieku badaniami dotyczącymi teorii infor-

macji. Teoria złożoności pozwala, między innymi, określać złożoność tekstów. Kołmogorowa interesowały teksty literackie, a głównie poezja i odpowiedź na pytanie, jaka część złożoności pochodzi od treści (zawartości semantycznej) danego tekstu (wiersza), a jaka pochodzi od różnego rodzaju chwytów literackich zastosowanych w tekście. Z tego powodu interesowała go mowa wiązana, bowiem dla niej stosunkowo łatwo jest określić, co rozumie się pod pojęciem chwytu literackiego. Odnośnie do wiersza można na przykład mówić o rytmie czy metrum (zob. [32, str. 46]).

Zacznijmy od teorii informacji Shannona. W 1948 roku w pracy [21] wprowadził on pojęcie entropii, która obecnie nazywa się entropią Shannona. Entropia mierzy złożoność informacji w przekazywanym komunikacie czy tekście. Mierzy zatem złożoność komunikatu. Im większa entropia, tym bardziej złożony (skomplikowany, niepewny) jest komunikat. Komunikatem może być na przykład dzieło literackie.

Precyzyjniej: przez *komunikat* (*wiadomość*) rozumie się skończony lub nieskończony zbiór $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ wiadomości elementarnych a_i wraz z rozkładem prawdopodobieństwa P na zbiorze A. Prawdopodobieństwo wiadomości elementarnej interpretujemy jako prawdopodobieństwo nadania tej właśnie wiadomości elementarnej. Wtedy wielkość $H = -\sum_i p_i \log_2 p_i$ nazywa się entropią rozkładu P. Z twierdzenia Chinczyna z 1957 roku wynika, że tak zdefiniowana funkcja H jest jedynym (z dokładnością do stałej multiplikatywnej) odwzorowaniem spełniającym pewne naturalne warunki, które są intuicyjnie wymagane od kwantytatywnej charakteryzacji pojęcia informacji (zob. [17, str. 181]).

Podejście Kołmogorowa do zdefiniowania złożoności oparte jest na całkiem innym koncepcie (zob. [12]). Z grubsza rzecz biorąc, idea oparta jest na obserwacji, że jeżeli chcemy przekazać ciąg znaków, to nie musimy przekazywać tego ciągu, a jedynie metodę (algorytm) wygenerowania tego ciągu. Aby formalnie zdefiniować złożoność Kołmogorowa, potrzebne jest nam pojęcie maszyny Turinga (precyzyjny i jednocześnie przystępny opis maszyny Turinga znaleźć można na przykład w książce [22] lub klasycznym już podręczniku [5]). Niech x będzie danym słowem (nad alfabetem Σ). Minimalnym opisem $d(x)$ słowa x jest najkrótsze słowo $\langle M, y\rangle$, przy czym M jest maszyną Turinga zatrzymującą się dla słowa wejściowego y i drukującą na taśmie x. *Złożoność Kołmogorowa* $K(x)$ słowa x zdefiniowana jest jako długość słowa $d(x)$, to znaczy $K(x) = |d(x)|$.

Definicja złożoności Kołmogorowa $K(x)$ jest optymalna w następującym sensie. Niech $p\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ będzie taką funkcją obliczalną, że $p(s) = x$. Słowo s nazywamy opisem słowa x względem p. Funkcja p nazywa się językiem opisu. Zdefiniujmy $K_p(x)$ jako długość najkrótszego słowa $d(x)$, dla którego $p(d(x)) = x$. Stąd wynika, że $K_p(x) = |d(x)|$. W tej sytuacji dla każdego

języka opisu p istnieje taka stała c, zależna jedynie od p, że $K(x) \leqslant K_p(x) + c$ dla każdego x. Szczegóły i dowód powyższej nierówności można znaleźć m.in. w pracach [17, 22, 35]. Porównania obu podejść do złożoności tekstów, tzn. Shannona i Kołmogorowa, dokonali Peter Grünwald i Paul Vitányi w artykule [4] (zob. też literaturę tam cytowaną). O współczesnych zastosowaniach złożoności Kołmogorowa, na przykład do fonetyki, można dowiedzieć się z pracy Kornaia [17]. O innych zastosowaniach w językoznawstwie napisał Uspienski w opracowaniu [30].

4.3. *Teoria wiersza – rytmika w poezji.* Rozważania na temat teorii wiersza podzielić można na dwie kategorie. Pierwsza koncentruje się na semantyce. Teoretycy wiersza twierdzą, że wiersz ze swej natury ma własność, która powoduje, że treści znaczeniowe zostają niejako uwypuklone i wzmocnione, że wiersz jest znacznie bardziej skomplikowany w warstwie znaczeniowej poprzez posiadanie złożonej sieci różnorakich połączeń semantycznych obecnych w poszczególnych wersach, a także między nimi i między strofami. Sztuka, a w szczególności poezja jest częścią większej struktury. Taką tezę w 1933 roku postawił Roman Jakobson:

> [...] sztuka jest częścią społecznej struktury, elementem pozostającym w określonych stosunkach z innymi, elementem zmiennym, ponieważ się ciągle dialektycznie zmienia zarówno zakres sztuki, jak i jej stosunek do innych wycinków społecznej struktury [6, str. 138].

W związku z tą skomplikowaną strukturą, w której znajduje się sztuka, mamy w poezji do czynienia ze szczególnym rodzajem znaczenia. Znaczenie to Jacobson uważa za główny składnik, który decyduje o poetyckości poezji (zob. [6, str. 138–139]).

> Ale w czym przejawia się poetyckość? – W tym, że słowo jest odczuwane jako słowo, a nie tylko jako reprezentant nazwanego przedmiotu lub jako wybuch emocji; w tym, że słowa, ich zestawienia, ich znaczenie, ich zewnętrzna i wewnętrzna forma nie są tylko obojętnym skierowaniem uwagi na rzeczywistość, lecz nabywają własnej wagi i wartości.

Drugą kategorię refleksji nad wierszem można określić jako formalną. W jej obrębie bada się wiersz z punktu widzenia jego formalnej budowy. Analizie poddaje się więc strukturę wiersza, elementy prozodii itp. Formalna strona wiersza znacznie lepiej nadaje się do badania przy zastosowaniu aparatu pojęć matematycznych. Wiersz, jako obiekt posiadający dość sztywną strukturę (być może z pominięciem wiersza wolnego), jest idealnym obiektem do rozważań matematycznych.

Kołmogorow nie był pierwszym, który zajął się formalną analizą wiersza. W swoim pierwszym liście-posłaniu, nawiązując do wykładu, który wygłosił 27 grudnia 1960 roku w Moskiewskim Towarzystwie Matematycznym, Kołmogorow napisał, że mówił w nim o prowadzonych ze współpracownikami pracach, będącymi rozwinięciem badań nad formalną analizą wiersza Andrieja Biełego, Waleriana A. Czudowskiego, Borisa W. Tomaszewskiego, Gieorgija A. Szengeli i Kiriła F. Taranowskiego – autora wydanej w Jugosławii monografii o rytmice rosyjskiego jamba i choreja.

Oprócz nazwisk wymienionych powyżej należy jeszcze dodać Władimira A. Nikonowa – językoznawcę i literaturoznawcę, autora pracy traktującej o rytmice w poezji Władimira W. Majakowskiego, którą badał przy użyciu metod statystycznych (zob. [19]).

Kołmogorow był jednak pierwszym, dla którego priorytetem była ścisłość – udało mu się ją osiągnąć. Umieścił badania nad analizą wiersza w kontekście szerszego paradygmatu nauki interdyscyplinarnej i transdyscyplinarnej, jaką jest cybernetyka – nauka o ogólnych systemach oraz systemach samoregulujących i komunikacji, a w ramach nauki o znakach – semiologii. Pojmowanie przez Kołmogorowa sztuki jako systemu znakowego było przełomem i dostarczyło nowych metod badawczych w celu rozwiązania starych problemów, a także wygenerowało niezliczoną ilość nowych i interesujących pytań.

Wybitny filolog Michaił L. Gasparow w swojej monografii z 1974 roku [2, str. 24] zamieszcza informację o grupie Kołmogorowa (A. W. Prochorow, N. D. Swietłowa, przez pewien czas – N. G. Ryczkowa i związani z grupą m.in. S. P. Bobrow i W. W. Iwanow) i ich osiągnięciach w precyzji sformułowań definicji występujących w teorii wiersza .

Gasparow za początek zastosowania ścisłych metod w teorii wiersza uważa rok 1910, kiedy to Andriej Biały opublikował książkę, będącą zbiorem artykułów, zatytułowaną *Symbolizm* [1].

Lata dziesiąte i dwudzieste XX wieku to intensywna kontynuacja naukowej teorii wiersza. Nie sposób nie wymienić tu (w kolejności alfabetycznej) kilku nazwisk badaczy (rzecz jasna lista jest niekompletna): Roman O. Jakobson, Gieorgij A. Szengieli, Boris W. Tomaszewskij, Nikolaj S. Trubeckoj, Wiktor M. Żyrmunskij. W ciągu tych dziesięciu lat dokonano niezwykle wiele na polu teorii wiersza i, jak twierdzi Gasparow, teoria wiersza stała się jedną z najbardziej rozwiniętych dziedzin poetyki, a teoria rosyjskiego wiersza jedną z najbardziej zaawansowanych w świecie [2, str. 5].

Później nastąpiła trzydziestoletnia przerwa, przerywana pojedynczymi pracami na przykład Kołmogorowa [15], po której w latach sześćdziesiątych XX

wieku teoria wiersza odżyła na nowo. Zajął się nią Kołmogorow, jego współpracownicy i uczniowie. Cel, jaki postawił sobie i swojej grupie, był bardzo ambitny. Chodziło mu o to, aby zapoznać się z wynikami i teoriami otrzymanymi przez wielkich poprzedników z lat dziesiątych i dwudziestych XX wieku i uściślić ich rezultaty. Było to zgodne z ówczesnym trendem unaukowienia humanistyki.

Wynikiem tej pracy było kilkanaście artykułów, których autorem bądź jednym z autorów był Kołmogorow. Większość stanowiły jednak prace samodzielne.

Kołmogorow pozostawił terminologię odnośnie do typów wierszy (*Oniegin* jest dalej napisany jambem, choć termin „jamb" od lat sześćdziesiątych XX wieku oznacza co innego niż na początku wieku XX, a dokładniej dopiero wtedy coś oznacza). Podał nowe, poprawne i jednoznaczne definicje nie tylko jambu, ale i innych metrów wierszy.

Niestety, wiele wyników lingwistycznych i literaturoznawczych otrzymanych przez Kołmogorowa oraz wiele jego idei nie zostało opublikowanych i nie zachowało się do naszych dni. Drobna część z nich przetrwała w pamięci innych uczonych i bywały wspominane w ich pracach [32, str. 47] i podczas różnego rodzaju konferencji poświęconych poetyce.

W 2015 roku ukazała się monografia [16], w której zebrane zostały w jednym miejscu artykuły Kołmogorowa, a także tezy niektórych jego wykładów dotyczących teorii wersyfikacji.

4.4. *Definicja jambu i metrum innych wierszy.* Jesienią 1960 roku Kołmogorow zaanonsował na Wydziale Mechaniczno-Matematycznym Uniwersytetu Moskiewskiego cykl seminariów *Niektóre problemy lingwistyki matematycznej*. Jednak zamiast cyklu seminariów odbyły się tylko trzy wykłady Kołmogorowa (19 października, 10 grudnia i 24 grudnia) pod istotnie innym, niż zapowiadany, tytułem *Teoria prawdopodobieństwa i analiza rytmu rosyjskiego wiersza*. Na wykładach obecni byli także filolodzy, do czego przyczynił się Uspienski, reklamując wykłady w tym środowisku.

Na pierwszym wykładzie Kołmogorow mówił o definicji jambu. Pokazywał, jakie ułomności mają wcześniejsze definicje podane przez teoretyków wersyfikacji.

Przede wszystkim zauważmy za Kołmogorowem, że możemy mówić o jambie jako właściwości stopy oraz o jambie jako właściwości wersu. Zazwyczaj mówiło się (i bardzo często mówi się nadal), cytując definicję Biełego, że stopa jambu składa się z dwóch sylab, z czego pierwsza jest nieakcentowana, a druga akcentowana. Weźmy jako przykład słynnego *Eugeniusza Oniegina*. Pierwszy

wers „Moj diadia samych czestnych prawił," zawiera jambiczne stopy zdefiniowane wyżej. Natomiast drugi wers: „Kogda nie w szutku zaniemog" nie spełnia już tego wymagania i nie składa się z jambicznych stop. Okazało się, że aby rozwiązać ten problem, należy zmienić definicję jambicznej stopy. Kołmogorow stwierdził, że należy odróżnić stopę mówioną, czyli ciąg akcentowanych i nieakcentowanych sylab, od stopy metrycznej, czyli połączenia pewnych abstrakcyjnych jednostek nazywanych *silnymi sylabami* (lub *iktami*) oraz *słabymi sylabami* (lub *słabymi czasami*). Następnym etapem budowy definicji jambu (i innych metrów wierszy) jest określenie zasad, jakie mają spełniać akcentowane i nieakcentowane sylaby *stopy mówionej* oraz silne i słabe sylaby *stopy metrycznej*.

Można tu zauważyć pewną strukturalną dwoistość analogiczną do pojęcia głoski i fonemu, czy ogólnie do *langue* i *parole* Ferdinanda de Saussure'a.

Definicja jambu okazuje się bardzo zwięzła, jeśli czytelnik zna występujące w niej terminy (zob. [37, str. 313]):

> [...] wersem jambicznym nazwiemy taki, w którym nie ma słowa, naruszającego zakaz Jakobsona, chyba że słowo to podpada pod pozwolenie Trediakowskiego.

Streszczenie dokonań Kołmogorowa i jego współpracowników oraz uczniów na polu teorii wiersza i ogólnie literaturoznawstwa daje Szyrajew w pracy [24].

5. Uwagi końcowe

Wydaje się, że niewielu polskich matematyków znających niektóre prace Kolmogorowa, w tej czy innej dziedzinie matematycznej, wie na przykład o jego pracach literaturoznawczych dotyczących teorii wiersza. Można podejrzewać, że wielu literaturoznawców również nie jest świadomych istnienia tych prac.

Mamy wrażenie, że wciąż istnieje podział na *fizyków* i *liryków*, pochodzący z wiersza Borysa Słuckiego pod tym samym tytułem. Główną przyczyną tego podziału zdaje się być odmienny sposób myślenia ludzi zajmujących się naukami ścisłymi i humanistycznymi. Rozumiał to Kołmogorow, pisząc dla humanistów.

Uspienski napisał bardzo ciekawą, niewielkich rozmiarów, książkę o różnicach dzielących matematyków i humanistów *Matiematiczeskoje i gumanitarnoje: prieodolenije barjera* [33]. Już w tytule podkreśla potrzebę pokonania bariery dzielącej ich.

Czy ta bariera zostanie kiedyś zniesiona?

Bibliografia

[1] A. Biełyj, *Simwolizm. Kniga statiej*, Musagiet, Moskwa 1910.
[2] M. Ł. Gasparow, *Sowriemiennyj russkij stich. Mietrika i ritmika*, Nauka, Moskwa 1974.
[3] S. Gerovitch, *From newspeak to cyberspeak: A history of Soviet cybernetics*, The MIT Press, Massachusetts 2004.
[4] P. D. Grünvald, P. M. B. Vitányi, *Kolmogorov complexity and information theory. With an interpretation in terms of questions and answers*, J. Log. Lang. Inf. 12 (2003), nr 4, 497–529.
[5] J. E. Hopcroft, J. D. Ullman, *Wprowadzenie do teorii automatów, języków i obliczeń*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994.
[6] R. Jakobson, *Co to jest poezja?*, [w:] *W poszukiwaniu istoty języka, wybór pism* (M. R. Mayenowa, red.), t. 2, Państwowy Instytut Wydawniczy, Warszawa 1989, 125–141.
[7] W. Ł. Janin, *Kołmogorow kak istorik*, Uspekhi Mat. Nauk 43 (1998), nr 6, 189–195.
[8] A. Je. Kibrik, *A. N. Kołmogorow i lingwistika*, Istor.-Mat. Issled. (2) 49 (2011), nr 14, 51–53.
[9] A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung,* Julius Springer, Berlin 1933.
[10] A. N. Kołmogorow, *O princypie tertium non datur*, Mat. Sb. 32 (1925), nr 4, 646–667.
[11] A. N. Kołmogorow, *Osnownyje poniatija tieorii wierojatnostiej* (1936).
[12] A. N. Kołmogorow, *Tri podchoda k opriedieleniju poniatija „koliczestwo informacyi"*, Problemy Peredachi Informatsii 1 (1965), nr 1, 3–11.
[13] A. N. Kołmogorow, *Nowgorodskoje ziemlewładienije XV wieka*, Fizmatlit, Moskwa 1994.
[14] A. N. Kołmogorow, *Siemioticzeskije posłanija. Publikacyja Wł. A. Uspienskogo*, Nowoje litieraturnoje obozrienije 27 (1997), 216–245.
[15] A. N. Kołmogorow, *Zamieczanije ob osnowach russkogo stichosłożenija*, [w:] *Trudy po stichowiedieniju* (A. W. Prochorow, red.), MCNMO, Moskwa 2015, 217–227.
[16] A. N. Kołmogorow, *Trudy po stichowiedieniju*, MCNMO, Moskwa 2015.
[17] A. Kornai, *Mathematical linguistics*, Springer-Verlag, London 2008.
[18] B. S. Miejłach, *Puti kompleksnogo izuczenija chudożestwiennogo tworczestwa*, [w:] *Sotrudniczestwo nauk i tajny tworczestwa* (B. S. Miejłach, red.), Iskusstwo, Moskwa 1968, 5–34.
[19] W. A. Nikonow, *Ritmika Majakowskogo*, Woprosy litieratury 7 (1958), 89–108.
[20] P. Seyffert, *Soviet literary structuralism. Background. Debate. Issues*, Slavica Publishers Inc., Columbus, Ohio 1985.
[21] C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, The Bell System Technical Journal 27 (1948), 379–423, 623–656.
[22] M. Sipser, *Wprowadzenie do teorii obliczeń*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2009.

[23] A. Ł. Szapiro, *Agrarnaja istorija Siewiero-zapada Rossii XVI wieka*, Nauka, Leningrad 1971.
[24] A. N. Szyriajew, *Andriej Nikołajewicz Kołmogorow (25.IV.1903–20.X.1987): In Memoriam*, Teor. Veroyatn. Primen. 34 (1989), nr 1, 5–118.
[25] A. M. Turing, *On Computable Numbers, With an Application to the Entscheidungsproblem*, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 42 (1937), nr 1, 230–265, A correction, Proc. Lond. Math. Soc.(2) 43 (1938), nr 1, 544–546.
[26] R. Urban, *Szkic historii lingwistyki matematycznej w Rosji i ZSRR, ze szczególnym uwzględnieniem tłumaczenia maszynowego*, LingVaria 21 (2016), nr 1, 249–267.
[27] R. Urban, *Wnioski z lektury „Semiotycznych posłań" Andrieja N. Kołmogorowa*, Socjolingwistyka 32 (2018), 287–295.
[28] W. A. Uspienskij, *K opriedieleniju padieża po A. N. Kołmogorowu*, Biułletien' Objedinienija po problemam maszynnogo pieriewoda 5 (1957), 11–18.
[29] W. A. Uspienskij, *Priedwarienije dla czitatielej „Nowogo litieraturnogo obozrienija" k „Siemioticzeskim posłanijam" Andrieja Nikołajewicza Kołmogorowa*, Nowoje litieraturnoje obozrienije 27 (1997), 1–109.
[30] W. A. Uspienskij, *Trudy po niematiematike. S priłożenijem siemioticzeskich posłanij A. N. Kołmogorowa k awtoru i jego druzjam* 2 (2002), 1319–1364.
[31] W. A. Uspienskij, *Kołmogorow i fiłołogiczeskije nauki*, Wiestnik Moskowskogo Uniwiersitieta, sier. 9, Fiłołogija 6 (2009), 11–20.
[32] W. A. Uspienskij, *Kołmogorow i fiłołogiczeskije nauki*, Istor.-Mat. Issled. (2) 49 (2011), nr 14, 40–51.
[33] W. A. Uspienskij, *Matiematiczeskoje i gumanitarnoje: prieodolenije barjera*, Izd. MCNMO, Moskwa 2011.
[34] N. Wiener, *Cybernetics: Or Control and Communication in the Animal and the Machine*, (Hermann& Cie)& Camb. Mass. (MIT Press), Paris 1948.
[35] P. Witanji, M. Li, *Kołmogorowskaja słożnost': dwadcat' let spustia*, Uspiechi matiematiczeskich nauk 43 (1988), nr 6, 129–166.
[36] A. P. Youschkevitch, *A. N. Kolmogorov: Historian and philosopher of mathematics on the occasion of his 80th birthday*, Historia Math. 10 (1983), 383–395.
[37] B. Żyłko, *Idea „ścisłego literaturoznawstwa" w rosyjskiej nauce o literaturze XX wieku*, [w:] *Strukturalizm w Europie środkowej i wschodniej. Wizje i rewizje* (W. Bolecki, D. Ulicka, red.), Wydawnictwo Instytutu Badań Literackich, Warszawa 2012, 310–319.

Roman Urban
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski
urban@math.uni.wroc.pl

Wiad. Mat. 56 (1) 2020, 103–106
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Zdzisław Skupień (Kraków)

Maksymalne przecinanie wielu bipiramid

1. Problem Browkina

W trzydziestym tomie *Wiadomości Matematycznych*, w 1993 roku Jerzy Browkin postawił następujące pytanie.

Zadanie 1.1 [1]**.** Czy istnieje wielościan wypukły o k krawędziach i płaszczyzna nie zawierająca jego wierzchołków, która przecina więcej niż $\frac{2}{3}k$ jego krawędzi?

Takie przecinanie (bez przecinania węzłów) nazywamy *lekkim*.

Okazuje się, że rozwiązanie powyższego zadania ma ciekawe powiązania z wielościanami trójwymiarowymi i teorią grafów. W szczególności, negatywna odpowiedź na powyższe pytanie stała się dla mnie inspiracją do konstrukcji nieskończonego ciągu tzw. bipiramid ze struną. U brył tych nie zaobserwujemy regularności, jednak pewną regularność dostrzeżemy w metodzie ich konstrukcji, o czym będzie mowa dalej.

Wielościan, spełniający zadane w powyższym problemie warunki, nie istnieje.

Twierdzenie 1.1. *Płaszczyzna lekko przecinająca wielościan wypukły o k krawędziach przecina co najwyżej* $2k/3$ *krawędzi.*

Najważniejszym wynikiem jest wykazanie, że ograniczenie Browkina $2k/3$ ma charakter progowy. Mianowicie, dla każdego $n \geqslant 4$ prezentujemy wielościan wypukły o n wierzchołkach i $k = 3n - 6$ krawędziach, który dopuszcza płaszczyznę przecinającą właśnie $2k/3$ spośród krawędzi. Wielościanami tymi są czworościan foremny dla $n = 4$, sześciościan dla $n = 5$ (sklejenie

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

dwóch kopii czworościanu) oraz wspomniana bipiramida ze struną dla każdego $n \geqslant 5$. Grafem takiego przykładowego wielościanu jest graf odpowiedniej n-wierzchołkowej triangulacji sfery.

2. Wielościany i grafy

Podstawowym wynikiem teorii wielościanów trójwymiarowych jest następująca charakteryzacja.

Twierdzenie 2.1 (Steinitz, zob. [3])**.** *Dany graf G jest grafem wielościanu wypukłego, gdy jest planarny i 3-spójny.*

Przypomnijmy, że graf nazywamy 3-spójnym, gdy jest spójny, ma przynajmniej cztery wierzchołki, a usunięcie z niego jednego lub dwóch wierzchołków nie psuje spójności.

Obszerny i elementarny dowód podaje Grünbaum w swojej książce [2, str. 235–242]).

Dowód twierdzenia 1.1. Niech M będzie powierzchnią wielościanu wypukłego w przestrzeni trójwymiarowej. Każda ściana jest zatem wypukłym wielokątem płaskim, a każda krawędź – odcinkiem przynależnym do dokładnie dwóch ścian.

Niech $G = G(M)$ oznacza *graf powierzchni* M, tzn. $G = (V(M), E(M))$, przy czym $V(M)$ i $E(M)$ to zbiory odpowiednio wierzchołków i krawędzi powierzchni. W tym przypadku zatem $k := |E(M)|$.

Rozważmy dowolną płaszczyznę $\mathcal{P}$, która lekko przecina M, czyli nie zawiera żadnego wierzchołka powierzchni M. Jeśli zatem $\mathcal{P}$ przecina dowolną ścianę, to $\mathcal{P}$ przecina dokładnie dwie krawędzie tej ściany, a przecięciem ze ścianą jest odcinek. Każdy taki odcinek nazywamy *krawędzią przecięcia* $\mathcal{P} \cap M$ – wierzchołkami przecięcia są końce tych odcinków. To przecięcie jest nośnikiem grafu $G_{\mathcal{P}} := G(\mathcal{P} \cap M)$, który jest cyklem i nazywany jest *grafem przecięcia* powierzchni M.

Załóżmy, że przecięcie $\mathcal{P} \cap M$ ma m krawędzi, zatem $\mathcal{P}$ przecina dokładnie m ścian i m krawędzi powierzchni M. Nadto $\mathcal{P}$ przecina dokładnie dwie krawędzie z każdej przeciętej ściany i nie przecina przynajmniej jednej krawędzi z każdej ściany wielościanu. Oznacza to, że co najmniej $m/2$ krawędzi nie przecina $\mathcal{P}$. Liczba krawędzi M to k, spełniona jest więc nierówność $k \geqslant m + m/2$, a stąd wynika, że $m \leqslant 2/3k$. □

Wniosek 2.2. *Jeśli $m = 2k/3$, to $\mathcal{P}$ przecina każdą ścianę i każda ściana jest trójkątna.*

3. Przykłady

Jako pierwszy przykład rozważmy płaszczyznę przecinającą wszystkie ściany czworościanu foremnego (który ma cztery trójkątne ściany, cztery wierzchołki oraz $k = 6$ krawędzi). Jako $\mathcal{P}$ wybierzmy taką płaszczyznę równoległą do dwóch niesąsiednich krawędzi, że te krawędzie są równo oddalone od $\mathcal{P}$. Wtedy przecięcie jest kwadratem, a zatem $m = 4 = 2k/3$.

W następnym przykładzie przecinamy krawędzie sześciościanu o pięciu wierzchołkach, dziewięciu krawędziach i sześciu ścianach trójkątnych równobocznych, otrzymanego przez sklejenie dwóch kopii czworościanu foremnego. Od tej bryły odcinamy krawędź łączącą dwa wierzchołki stopnia cztery. Przecięta jest więc każda ściana oraz sześć krawędzi, czyli dwie trzecie spośród wszystkich krawędzi bryły.

Zauważmy, że optymalna płaszczyzna lekko przecinająca wielościan jest płaszczyzną, która odcina pojedynczą krawędź lub pojedynczą ścianę.

Następne przykłady klasycznych wielościanów sugerują, że liczba przeciętych krawędzi spada, gdy wielościan ma sześć lub więcej wierzchołków. Rozważmy bowiem najprostsze nawzajem dualne bryły platońskie: sześcian i ośmiościan foremny. W przypadku tych brył przy odcinaniu krawędzi i ściany liczbami przeciętych krawędzi są odpowiednio cztery i cztery oraz sześć i sześć, obie zaś bryły mają aż po dwanaście krawędzi.

Wróćmy więc do sześciościanu, który jest bipiramidą. Jako bipiramida ma ona dwa wierzchołki szczytowe (powiedzmy W_1 i W_2) i są to wierzchołki stopnia trzy. Trójkąt indukowany przez pozostałe wierzchołki, powiedzmy wierzchołki A, B, C, nazywamy *podstawą* albo (może lepiej) *przeponą* tej bipiramidy.

4. Wysoce regularny ciąg bipiramid z ekstremalnym przecinaniem

Sześciościan przekształcamy w nową izomorficzną bryłę o tej samej przeponie ABC. Usuwamy mianowicie wszystkie krawędzie przyległe do W_1 lub W_2 i te wierzchołki szczytowe W_1 i W_2 umieszczamy na prostej prostopadłej do przepony i zawierającej wierzchołek A tak, aby punkt A był środkiem odcinka W_1W_2. Oba wierzchołki W_i łączymy krawędziami z wierzchołkami B i C. Otrzymany graf planarny o pięciu wierzchołkach jest grafem potriangulowanego sześciościanu wypukłego. Zakładamy, że odcinek W_1W_2 (zawierający A) jest na brzegu bryły, czyli jest kwazikrawędzią bryły – jest on nazywany *struną bryły*. Dlatego tę bryłę nazywamy bipiramidą ze struną. Jest to bipiramida trójkątowa, bo jej przeponą jest trójkąt.

W ogólności, jeśli przepona jest p-kątem foremnym dla dowolnego naturalnego $p > 3$, to otrzymujemy potriangulowaną bipiramidę p-kątową ze struną. Wtedy odcinanie tej struny jest lekkim przecinaniem wszystkich ścian, czyli przeciętych zostaje 2/3 spośród krawędzi bipiramidy.

Reasumując, w konstruowaniu brył widać regularność – ale regularność każdej z nich ogranicza się do dwóch płaszczyzn symetrii. Jednakże każda z tych brył dopuszcza płaszczyznę przecinającą aż 2/3 ze wszystkich krawędzi.

Bibliografia

[1] J. Browkin, *Zadanie 304 c)**, Wiad. Mat. 30 (1993), nr 1, 129.
[2] B. Grünbaum, *Convex polytopes*, wyd. 2, Graduate Text in Math., t. 221, Springer, New York 2003.
[3] E. Steinitz, *Polyeder und Raumeinteilungen*, [w:] *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, t. 3 (Geometrie), Verlag und Druck von Teubner, Leipzig 1914, 1–139.

Zdzisław Skupień
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza
skupien@agh.edu.pl

Wiad. Mat. 56 (1) 2020, 107–124
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Rozmowa z Ianem Stewartem

Ian Stewart to znakomity angielski matematyk, emerytowany profesor University of Warwick w Wielkiej Brytanii. W 2001 roku został członkiem Royal Society[1]. Jego główne wyniki naukowe związane są z szeroko pojętą teorią układów dynamicznych. Znany jest jako autor licznych książek; część z nich została przetłumaczona na język polski. Rozmowa – z wykorzystaniem połączeń elektronicznych na linii angielsko-polskiej – odbyła się wiosną 2020 roku.

Krzysztof Ciesielski*: Zacznijmy od twoich znakomitych książek. Napisałeś mnóstwo popularnych książek o matematyce, ale również zaawansowane monografie, podręczniki dla studentów, komiksy, książki o komputerach i opowieści science fiction. Gdy byłem w Warwick trzydzieści lat temu, tamtejsi matematycy żartowali, że „Stewart pisze jedną książkę tygodniowo". Zapytałem cię wtedy, ile książek napisałeś, a ty odpowiedziałeś, że – jeżeli liczyć każde wydanie i każde tłumaczenie osobno – to około setki. Wtedy żadna z twoich książek nie była wydana w Polsce – teraz jest ich dwadzieścia pięć i wszystkie zostały napisane po tamtej rozmowie. Ile więc książek napisałeś? Które ci się najbardziej podobają?*

Ian Stewart: Łącznie jest ich około stu dwudziestu (nie licząc tłumaczeń). Po dołączeniu przekładów wychodzi nieco ponad czterysta, a kolejne pięćdziesiąt jest w przygotowaniu. Około pięćdziesięciu z tych stu dwudziestu to książki

[1] *The Royal Society of London for Improving Natural Knowledge* jest brytyjskim odpowiednikiem Akademii Nauk.

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

w rodzaju „jak programować na domowym komputerze", wydane w gorączkowym trzyletnim okresie w latach osiemdziesiątych ubiegłego wieku. Mam w dorobku zarówno książki dla dzieci, jak i monografie badawcze. Wiele z nich ma współautorów, co jest bardzo praktyczne. Dobrze się pisze z innymi – o ile wybierze się właściwych ludzi.

Moje ulubione to chyba *Czy Bóg gra w kości?*, gdyż była pierwszą moją znaczącą książką popularną o matematyce, *Gabinet matematycznych zagadek*, której pisanie było dla mnie wspaniałą zabawą i który osiągnął szóste miejsce na Amazonie, oraz *Siedemnaście równań, które zmieniło świat*, która, ku zaskoczeniu wszystkich, znakomicie się sprzedawała.

Myślę, że Czy Bóg gra w kości? *jest twoją najbardziej znaną książką, prawda? Przy okazji – jej najnowsze wydanie istotnie różni się od pierwszego... Jak zmieniła się ta książka? Ile egzemplarzy zostało sprzedanych?*

Tak, to pewnie ta najbardziej znana. Właściwie od tamtego czasu jest już tylko gorzej... Przypuszczam, że masz na myśli jedną z moich najnowszych książek *Czy kości grają w Boga?*, która jest zupełnie inna. Drugie wydanie *Czy Bóg gra w kości?*, z 1996 roku, jest wciąż wznawiane. Sprzedano około stu pięćdziesięciu tysięcy egzemplarzy. W nowej książce piszę o rozmaitych sposobach wykorzystania matematyki do zrozumienia niepewności – od probabilistyki do teorii kwantowej. Niektóre jej części są niekonwencjonalne. „Odwróciłem" tytuł, by w ten sposób „zamknąć" moje pisanie – ale potem napisałem kolejną książkę, jeszcze nie opublikowaną.

W pewnej księgarni w Krakowie widziałem Czy Bóg gra w kości? *w dziale książek religijnych. Znasz podobne zabawne historie związane z twoimi książkami?*

Cóż, Amazon wciąż oferuje mi moje własne książki, bo od czasu do czasu sprawdzam, jak się sprzedają. Ktoś myślał też kiedyś, że *Matematyka życia* jest o życiu codziennym, a nie o biologii. Księgarnie nigdy nie wiedzą, czy *Naukę Świata Dysku* umieścić w dziale popularnonaukowym czy wśród książek science fiction.

Na ile języków przetłumaczono twoje książki?

Nie licząc angielskiego, jak dotąd na trzydzieści trzy. Plus amerykański... W tych trzydziestu trzech są indonezyjski, estoński i wietnamski.

W twoich książkach jest mnóstwo żartów związanych z angielską kulturą i historią, a także gier słownych. Podam przykład z jednego z twoich dowcipów

rysunkowych. Jest to plakat z rysunkiem przedstawiającym Paula Halmosa z cyrklem i wielkim kołem, reklamujący nieistniejący film o tytule Radius of the Lost Arc[2]. *Nie obawiasz się o jakość tłumaczenia swoich książek?*

To już problem tłumaczy! Przyjmuję, że wykonują swoją pracę najlepiej, jak potrafią. Wielu dowcipów nie da się przetłumaczyć. Sam trochę tłumaczyłem, głównie z francuskiego na angielski, i miałem ten sam problem. Raz miałem okazję wstawić żart angielski, którego nie było w oryginale. Sądzę, że inni tłumacze też tak robią. Mam przerośnięte poczucie humoru i nie jestem w stanie się powstrzymać.

Jesteś też świetnym rysownikiem, swoje rysunki podpisujesz „Cosgrove". Skąd wziął się ten pseudonim?

W żadnym wypadku świetnym, ale próbuję czasem sił w rysowaniu, na przykład jestem autorem trzech komiksów matematycznych, wydanych po francusku. Maluję też – nieco bardziej artystycznie – pejzaże akwarelą. Pseudonim „Cosgrove" powstał, gdy grupa doktorantów University of Warwick postanowiła w 1968 roku założyć czasopismo *Manifold*[3]. Byłem wśród nich i postanowiłem umieszczać w numerach krótkie historyjki obrazkowe „Gruppen". Tytuł (po niemiecku „grupy") powstał, gdy jeden z nas był w Instytucie Matematycznym w Oksfordzie i zauważył pustą szklaną gablotę. W tamtym czasie matematycy wciąż odkrywali nowe sporadyczne skończone grupy proste, a my żartowaliśmy, że gablota była przygotowana dla kolejnej z nich. W Warwick wycięliśmy z tektury komiksowe postacie grup prostych, włożyliśmy je do pudełka, a John Jaworski zaproponował nazwę „Gruppen". Uznaliśmy, że rysownik musi mieć pseudonim, i John zauważył na ścianie kalendarz z lokalnej filii Cosgrove Garage[4]. Jak to często w życiu bywa, ukradliśmy sobie tę nazwę.

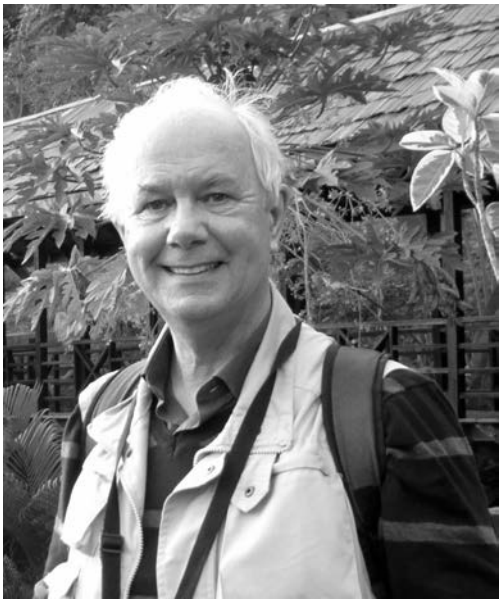
Może warto powiedzieć coś o Manifold*, które było czymś wyjątkowym.*

Manifold było czymś, co wielbiciele science fiction nazywają *fanzinem*. Powielaliśmy je samodzielnie, używając sprzętu Instytutu Matematyki (za zgodą profesora Christophera Zeemana, dyrektora Instytutu). Jak na dzisiejsze standardy, ten sprzęt był dość prymitywny, a zeszyty musieliśmy spinać ręcznie. W piśmie była mieszanka poważnych tekstów o ważnych matematycznych ideach

[2] Aluzja do filmu *Poszukiwacze zaginionej Arki* (ang. *Raiders of the Lost Ark*) z Harrisonem Fordem w roli głównej.

[3] W języku angielskim „manifold" oznacza „rozmaitość", ale też „różnorodny".

[4] Angielska firma motoryzacyjna handlująca używanymi samochodami.



Ian Stewart

oraz materiałów humorystycznych. Planowaliśmy wydawać trzy numery w roku i tak było przez pierwsze cztery lata. Potem trochę zwolniliśmy tempo, ale w sumie wydaliśmy dwadzieścia zeszytów. W najlepszym momencie sprzedawaliśmy sześćset egzemplarzy każdego zeszytu. Finansowaliśmy to dzięki zagranicznym prenumeratorom instytucjonalnym, którzy płacili cenę około dziesięciokrotnie wyższą od normalnej. Nasze pismo było prenumerowane przez wiele uniwersytetów, szczególnie z Ameryki. Niektóre artykuły zostały potem wydane w formie książki[5].

Tak dotarliśmy do University of Warwick. Ważną osobą tamtejszego instytutu matematycznego był Christopher Zeeman. Ty i Tim Poston zadedykowaliście mu swoją książkę o teorii katastrof słowami: „Christopherowi Zeemanowi, u którego stóp siedzimy i na którego ramionach stoimy". Był wyjątkową i wyróżniającą się osobą. Powiedz coś więcej o Zeemanie.

Chciałbym podkreślić, że ta dedykacja to haiku[6]. Mało kto to zauważa.

Christopher Zeeman był niesamowity. Był pracoholikiem – nie było chwili, w której by nie pracował. Założył Warwick Mathematics Research Centre, które

[5] Wybór tekstów z *Manifold* ukazał się w książce *Seven years of Manifold 1968–1980* pod redakcją I. Stewarta i J. Jaworskiego.

[6] Oczywiście, tylko w wersji angielskiej, która brzmi „To Christopher Zeeman, at whose feet we sit, on whose shoulders we stand".

organizowało sympozja na bieżące tematy, oraz Instytut Matematyki. Robił wszystko, począwszy od wygłaszania wykładów dla pobliskich szkół czy w radiu do pełnienia funkcji administracyjnych w ważnych organizacjach. Był też znakomitym topologiem. Gdy był przytłoczony pracą i musiał odrzucać zaproszenia na imprezy popularyzujące matematykę, prosił mnie, bym się tym zajął. Myślę, że wyczuł we mnie bratnią duszę. Zmarł w 2016 roku, ale pozostawione przez niego dziedzictwo jest w Instytucie w Warwick wciąż żywe.

Otrzymałeś od University of Warwick doktorat i rozpocząłeś prace w tamtejszym Instytucie Matematyki. Z tego co wiem, w Wielkiej Brytanii bardzo rzadko się zdarza, że młody doktor dostaje pracę na uniwersytecie, na którym uzyskał doktorat. Jak to było w twoim przypadku?

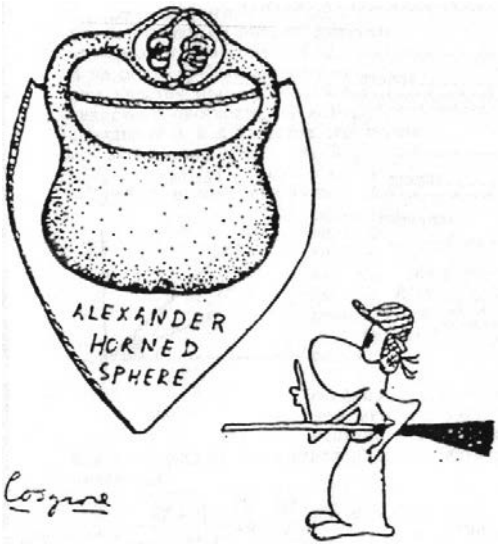
W tamtych czasach takie sytuacje zdarzały się częściej, bo rząd brytyjski właśnie założył około ośmiu nowych uniwersytetów, w tym Warwick. Przez krótki czas każdy z doktoratem z matematyki mógł zostać zatrudniony na uniwersytecie, jeżeli tylko chciał. Kończyłem doktorat i szykowałem się do poszukiwania pracy. Pewnego dnia przychodzę, a tam mi mówią „Gratulacje, dostałeś pracę." Na co ja: „Jaką pracę?" „Tymczasową, wykładowcy na następny rok. Nie składałeś podania, ale uznaliśmy, że nadajesz się lepiej niż inni, którzy się zgłosili. Chcesz?". Po roku moje zatrudnienie zmienili na stałe, więc należy przyjąć, że byli zadowoleni.

To dobry moment, by zająć się twoimi badaniami i wynikami naukowymi. Doktorat pisałeś o algebrach Liego, ale potem zmieniłeś zainteresowania.

Gdy przybyłem do Warwick, by zrobić doktorat, chciałem pracować w teorii grup nieskończonych. W Warwick był Brian Hartley, który został moim promotorem. Zasugerował, bym badał pewne związki między grupami nieskończonymi i nieskończenie wymiarowymi algebrami Liego. Udało mi się z tym uporać w ciągu czterech miesięcy i dalej pracowałem w tematyce algebr Liego, a po dwóch latach uzyskałem doktorat.

Około 1970 roku mój obszar badawczy się zmienił. Zeeman zainteresował się teorią katastrof, czyli nowymi ideami René Thoma dotyczącymi osobliwości. Wykłady Zeemana zainspirowały jego doktoranta Tima Postona i mnie. Napisaliśmy o tym wspólnie pracę, opublikowaną w 1977 roku. Wtedy właśnie obaj zajęliśmy się tą teorią.

Przez pewien czas moja lista publikacji wyglądała jak bezładna zbieranina. Następny krok miał miejsce w 1983 roku, gdy pojechałem (wraz z moją żoną Avril i synami Jamesem i Christopherem) do Houston w Teksasie, by przez rok pracować z Martym Golubitskym. On zauważył możliwość zastosowania teorii



„Upolowałem ją na safari dla topologów"

osobliwości i teorii grup do układów dynamicznych z symetrią. W tamtym roku napisaliśmy dwa artykuły, jeden o symetrycznej bifurkacji Hopfa, a drugi o jej zastosowaniu do przepływu Couette'a–Taylora cieczy. Potem pracowaliśmy razem w tej tematyce, w końcu przenosząc się do dynamiki sieci. Nadal zresztą współpracujemy.

W 2003 roku zorientowaliśmy się, że możemy rozwinąć podobną teorię dla sieci sprzężonych układów dynamicznych, niekoniecznie symetrycznych. Od tego czasu wciąż badamy te zagadnienia. Napisałem też kilka pojedynczych artykułów na inne tematy. Praca Hassana Babikera i Staszka Janeczki, którą Staszek pokazał mi niedawno podczas mojej wizyty w Polsce, zainspirowała mnie do zajęcia się łańcuchami czworościanów foremnych – i napisałem o nich pracę. Po przejściu na emeryturę mogę robić, co chcę, nie obawiając się, że ucierpi na tym moja kariera.

Zostałeś członkiem Royal Society – jestem przekonany, że przede wszystkim ze względu na wyniki twoich badań. Które z nich uważasz za najbardziej wartościowe, które ci się najbardziej podobają?

Zostałem wybrany członkiem Towarzystwa za połączenie popularyzacji nauk przyrodniczych (głównie matematyki) i wartościowych osiągnięć naukowych. Żeby zostać wybranym wyłącznie na podstawie wyników pracy badawczej, trzeba osiągnąć lepsze rezultaty niż ja. Myślę, że najbardziej użytecznymi moimi wynikami były te zawarte w pracy z Martym o symetrycznych bifurka-

cjach Hopfa. To przydatny rezultat, z mnóstwem zastosowań, który przy okazji przekonał nas, że powinniśmy razem rozwijać takie samo podejście do ogólnej teorii symetrii w dynamice i teorii bifurkacji. Innym artykułem, z którego jestem dumny, jest moja pierwsza praca poświęcona dynamice sieci, z Martym i Marcusem Pivato. To otworzyło całkiem nowy obszar badań. Oczywiście mnóstwo innych osób pracowało nad sieciami, ale my podeszliśmy do nich w takim duchu, jak Thom i Stephen Smale w przypadku układów dynamicznych – pytając, jakie są ogólne struktury i twierdzenia.

W książce Listy do młodego matematyka *pisałeś o swoim rozwiązaniu pewnego problemu, które powstało w oryginalny sposób. Napisałeś, że bazgrałeś na kartce na temat tego zagadnienia, bez konkretnego rezultatu, przez całą podróż pociągiem z Warszawy do Krakowa. Lektura tego fragmentu zrobiła na mnie duże wrażenie, bo od razu skojarzyłem to z twoją wizytą w Krakowie w czerwcu 2002 roku – czekałem wtedy na ciebie na dworcu i gdy pociąg przyjechał, odwiozłem cię do hotelu. Zupełnie nie wyglądałeś wtedy na kogoś, kto ciężko i bezskutecznie pracował przez ostatnie trzy godziny nad fascynującym problemem.*

To prawda! Zawsze biorę notes i pióro do pociągów i samolotów, bo one są często dobrym miejscem do pracy naukowej. Jest się w nieznanym miejscu, więc myśli nie idą utartym szlakiem, a do tego przez parę godzin nie ma się nic do roboty. Wtedy, w drodze do Krakowa udało mi się jednak do czegoś dojść, a definitywnie rozwiązałem problem w drodze powrotnej do Warszawy. Chodziło o synchronizację w sieciach i konstrukcję sieci ilorazowej, która ma dynamikę klastrów synchronicznych.

Ile razy odwiedziłeś Polskę? Ostatnio otrzymałeś prestiżowe wyróżnienie Kosmos Pitagorasa[7]*.*

Jak dotąd dwukrotnie. Mam nadzieję zwiększyć tę liczbę. Zważywszy na COVID-19, niestety pewnie nie tak szybko.

Pewnie najbardziej prestiżowym wyróżnieniem, jakie cię spotkało, było członkostwo Royal Society, prawda? Które spośród swoich wielu wyróżnień najbardziej cenisz?

Tak, członkostwo w Royal Society zdecydowanie wygrywa. Wysoko na liście jest też Medal Faradaya[8] Royal Society za popularyzację, a także Medal

[7] Więcej o tym wyróżnieniu można przeczytać w zeszycie 54 (2) *Wiadomości Matematycznych* w artykule o Centrum Studiów Zaawansowanych na Politechnice Warszawskiej.

[8] Medal przyznawany corocznie od 1986 roku za mistrzostwo w przekazywaniu nauki w Zjednoczonym Królestwie. Stewart otrzymał go w 1995 roku.

Zeemana[9] przyznawany przez London Mathematical Society i Institute of Mathematics and its Applications. Oczywiście Kosmos Pitagorasa. Lewis Thomas Prize for Science Writing[10], którą otrzymałem wspólnie ze Steve'em Strogatzem. Jestem też dumny z Bloody Stupid Johnson Award for Innovative Uses of Mathematics, przyznanej mi na Konwencie Świata Dysku w 2016 roku. Świat Dysku jest humorystycznym światem fantasy nieżyjącego już sir Terry'ego Pratchetta, którego książki sprzedawały się w milionach egzemplarzy.

Jednym z redaktorów The Mathematical Intelligencer *zostałeś zaraz po tym, gdy* Manifold *przestało istnieć. Jak to się stało? Jak wyglądała praca w tym czasopiśmie?*

Była to naturalna kolej rzeczy. Byłem przez pewien czas redaktorem działu recenzji *The Mathematical Intelligencer*, byłem też odpowiedzialny za kolumnę *Mathematical Tourist*, w której publikowaliśmy artykuły różnych autorów o matematycznych pomnikach, budynkach i w zasadzie wszystkim matematycznym na całym świecie. Sprawiało mi to sporą radość, bardzo to lubiłem.

Współpracowałeś też aktywnie z Scientific American. *Powiedz coś o tym.*

Jako nastolatek byłem miłośnikiem kolumny *Mathematical Games* Martina Gardnera. Gdy zakończył jej pisanie, na pewien czas przejął ją Douglas Hofstadter, a potem Kee Dewdney, ale zmieniła się wtedy w kolumnę rekreacji komputerowych. Wydanie francuskie *Pour La Science* chciało mieć nadal kolumnę matematyczną i przez pewien czas ją miało, ale potem jej autor musiał zakończyć pracę. Poprosili mnie więc, bym ją przejął (Christopher Zeeman znał redaktora, Philippe'a Boulangera, więc podejrzewam, że maczał w tym palce). Zacząłem pisać do wydania francuskiego w 1987 roku. Potem podjęły to wydania w innych językach, aż wreszcie dołączyło do nich główne – amerykańskie – i od 1990 do 2001 roku napisałem dla nich dziewięćdziesiąt sześć odcinków. Dla wydania francuskiego było ich sto trzydzieści pięć.

Zwykle, gdy robi się wywiad ze sławnym matematykiem, to pytanie pada jako pierwsze, ale ja je postawię dopiero teraz. Jak to się stało, że zostałeś matematykiem?

We wrześniu 1956 rozpocząłem naukę w Harvey Grammar School w Folkestone. Podczas dwóch ostatnich lat nauki uczniowie przygotowują się do

[9] Medal ten przyznawany jest co dwa lata za promocję i upowszechnianie matematyki dla szerokiego grona odbiorców w Zjednoczonym Królestwie. Stewart był pierwszym laureatem tej nagrody, w 2008 roku.

[10] Przyznawana przez Rockefeller University od 1993 roku.

egzaminów *A-level*[11]. Jako przedmioty egzaminacyjne wybrałem matematykę teoretyczną, matematykę stosowaną i fizykę. Nauczycielem matematyki w starszych klasach był Gordon Radford. Miałem szczęście – był on osobą bardzo inspirującą i miał znaczący wpływ na moją decyzję o studiowaniu matematyki. Jeżeli miał w klasie nadzwyczaj zdolnego chłopaka[12], poświęcał wiele czasu na uczenie go materiału spoza programu. W moim roczniku w szkole miał pięciu takich podopiecznych i po około sześciu miesiącach zorientował się, że znamy już cały dwuletni program, więc kazał nam siedzieć z tyłu, robić zadania domowe i nie przeszkadzać pozostałym. Potem, w swoim wolnym czasie (około trzech i pół godziny tygodniowo), pracował z nami nad materiałem spoza sylabusa. Studiowaliśmy teorię mnogości, której on sam chciał się nauczyć. Główną informacją, którą stamtąd wyniosłem, było to, że matematyka jest znacznie obszerniejsza, niż większości ludzi się wydaje.

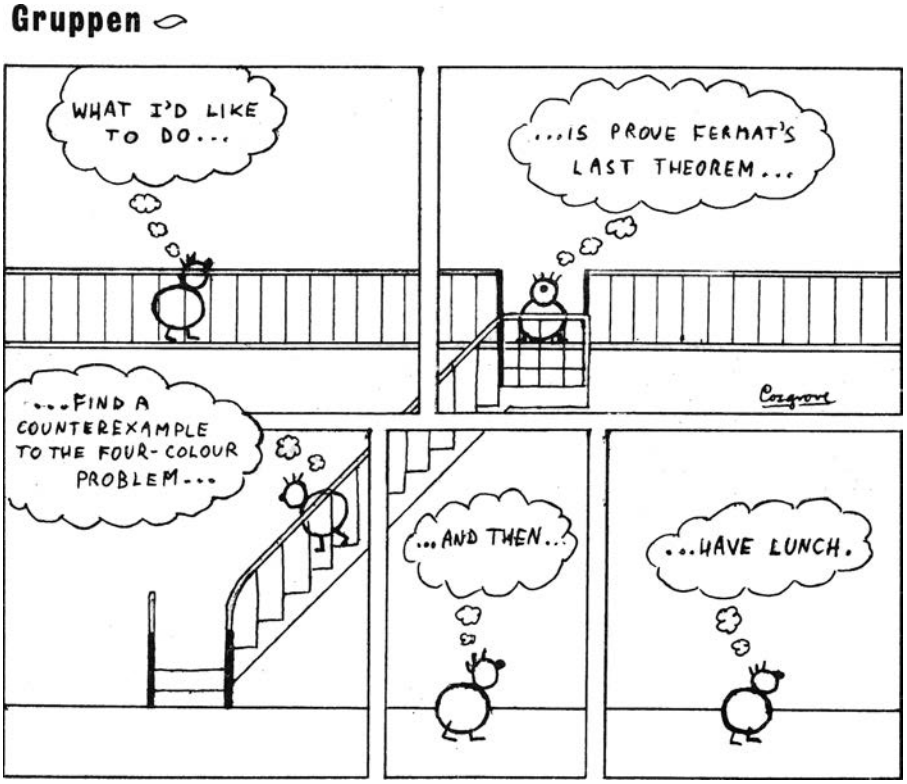
Wpływ na moje kształcenie miała też kolumna Gardnera *Mathematical Games* w *Scientific American*. Wedle słów Rona Grahama, Gardner sprawił, że setki dzieci stały się matematykami, a setki matematyków – dziećmi. Czytałem tę kolumnę co miesiąc, a wiele lat później sam ją prowadziłem. Od Gardnera dowiedziałem się, że matematyka może być zabawą, i że cały czas odkrywana jest nowa matematyka. Razem z paroma przyjaciółmi zabawialiśmy się więc różnymi rzeczami, mniej lub bardziej powiązanymi z matematyką. Jeden z nas, by sprawdzić wyprowadzony przez nas wzór, rzucał pięcioma kośćmi około stu tysięcy razy.

W wieku szesnastu lat wiedziałem, że chcę studiować matematykę lub fizykę, ale nie byłem pewny, którą z nich. Pan Radford chciał, żeby trzech z nas zdawało egzaminy *A-level* o rok wcześniej. Dyrektor, dla zasady, nie chciał się zgodzić, ale pan Radford miał chytry plan. Uczniowie starszych klas tygodniami przygotowywali się do próbnego egzaminu *A-level* z matematyki teoretycznej i stosowanej. W dniu tego egzaminu (pierwszy zdawano rano, drugi po południu), gdy nasza trójka zjawiła się w szkole, wziął nas na bok, i powiedział: „nie macie dzisiaj normalnych lekcji – piszecie z nimi egzamin próbny". Żadnych powtórek, żadnego ostrzeżenia. Zajęliśmy pierwsze trzy miejsca, zgodnie z jego przewidywaniem. Na tej podstawie, połączonej z ostatnią szansą na stypendium państwowe, dyrektor zgodził się, żebyśmy pisali *A-level* rok wcześniej, a później *S-level*[13].

[11] Egzaminy te są z grubsza odpowiednikiem matury rozszerzonej.

[12] Harvey Grammar School jest szkołą męską.

[13] Dodatkowy egzamin pozwalający wówczas ubiegać się o stypendium państwowe i miejsce na najbardziej prestiżowych uniwersytetach.



Manifold, nr 3 (wiosna 1969)

To zdarzenie zmieniło moje życie. Pan Radford znał matematyka z Cambridge, Davida Epsteina, którego uczył wcześniej w Afryce Południowej. Poprosił go o radę, co ze mną zrobić. David pracował w nowo założonym Churchill College, gdzie poszukiwano chłopców ze szkół średnich. „Przyślij go do nas", powiedział. Otrzymałem więc formalny list z ofertą studiów w Churchill, pod warunkiem, że wezmę udział w egzaminie wstępnym (choć nie musiałem go nawet zaliczyć). Dyrektor był w szoku – nic podobnego nie przytrafiło się wcześniej żadnemu z jego podopiecznych. Podszedłem więc do tego egzaminu i poszło mi na tyle dobrze, że przyznano mi College Exhibition (stypendium drugiej klasy) i rozpocząłem studia matematyczne w Cambridge. Były świetne, chciałem uczyć się dalej i prowadzić własne badania, zostałem zatem zawodowym matematykiem.

Inne, podobne pytanie. Jak to się stało, że postanowiłeś pisać o matematyce dla niematematyków? I jak to się stało, że nie skończyło się na paru książkach czy artykułach, ale napisałeś ich tak wiele?

Patrząc wstecz, widać, że zmierzałem w tym kierunku od dzieciństwa. W Cambridge redagowałem magazyn studenckiego kółka matematycznego Eureka. W Warwick założyliśmy *Manifold*. Pisałem artykuły dla *New Scientist* i różne drobiazgi dla szerokiej publiczności. W 1988 roku Ravi Mirchandani, redaktor w Penguin Books, poprosił mnie o napisanie książki popularnej o teorii chaosu. Ukazała się w 1989 roku jako *Czy Bóg gra w kości? Nowa matematyka chaosu*, wydana w twardej oprawie przez Blackwell. Gdy wydanie Penguina w miękkiej oprawie ukazało się rok później, miało dziesięć tysięcy zamówień w przedsprzedaży – cały nakład. Musieli od razu zrobić dodruk. Choć wówczas nie zdawałem sobie z tego sprawy, w tamtym momencie rozpoczęła się moja przyszła „druga praca" jako autora książek o nauce. Potem nastąpił efekt kuli śnieżnej.

Zwykle okres między początkiem pisania książki czy artykułu a końcem jest krótki, ale parę razy było to związane z długą przerwą. Spędziliśmy z Dawidem Tallem dziesięć lat nad naszym podręcznikiem z analizy zespolonej, bo chcieliśmy zawrzeć w niej rozdział o homologicznej wersji twierdzenia Cauchy'ego, ale nie udawało nam się go napisać tak, jak chcieliśmy. W końcu z tego fragmentu zrezygnowaliśmy i książka została wydana. Ironią losu jest, że w nowym wydaniu ten rozdział się pojawił, bo jednak wpadliśmy na pomysł, jak to zrobić. W 1978 roku wspólnie z Timem Postonem zdecydowaliśmy się na napisanie powieści science fiction i nawet połowę napisaliśmy, ale Tim się przeprowadził i projekt trafił do zamrażarki. W końcu, trzydzieści osiem lat później, doszedłem do wniosku, że nie posuwamy się do przodu, bo to, co mieliśmy zrobione, było napisane na maszynie do pisania, a nie w formie elektronicznej. Nie mieliśmy pliku, nad którym moglibyśmy pracować. Wpisałem więc to, co mieliśmy, do komputera i pół roku później ukończyliśmy powieść. Została wydana przez ReAnimus Press jako *The Living Labyrinth*. W ciągu kolejnych sześciu miesięcy napisaliśmy kontynuację, *Rock Star*, wydaną w tym samym wydawnictwie.

Zaraz, zaraz. Czy Bóg gra w kości? *nie było twoją pierwszą książką popularnonaukową o matematyce! Przed moim przyjazdem do Warwick napisałeś* Concepts of Modern Mathematics. *Tę książkę przetłumaczono na język rosyjski, więc mogłem ją przeczytać w Polsce* (*w pierwszej połowie lat osiemdziesiątych XX wieku w Polsce dostęp do książek wydanych w Anglii był bardzo trudny*). *Z kolei w 1987 roku, gdy byłem w Warwick, wydano* The Problems of Mathematics. *Obie te książki bardzo mi się podobają i nigdy nie nazwałbym ich „drobiazgami"*.

Czy Bóg gra w kości? była moją pierwszą książką popularyzującą matematykę, która odniosła komercyjny sukces i ona właśnie uruchomiła moją poważną karierę jako pisarza.

Rzeczywiście, wcześniej napisałem *Concepts of Modern Mathematics*, opartą na dziesięciotygodniowym kursie matematyki przeznaczonym dla dorosłych, prowadzonym przeze mnie w Warwick. Wydana została przez Penguin, po wyczerpaniu nakładu została wznowiona przez Dover Books i jeszcze niedawno była w sprzedaży, ale Dover ogłosiło bankructwo. Albo ktoś kupi wydawnictwo i książka znowu będzie sprzedawana, albo prawa autorskie zostaną mi zwrócone i znajdę kogoś, kto ją ponownie wyda.

Podobnie jest z *The Problems of Mathematics*. To nie miała być książka przeznaczona dla szerokiego grona czytelników – docelowa grupa adresatów to studenci. Nadal jest rozpowszechniana – w zmienionej wersji, jako *Stąd do nieskończoności*.

Wcześniej napisałem też dwie książki z matematycznymi zagadkami dla dzieci: *Nut-Crackers* oraz *Get Knotted!*. Nie traktowałem jednak wtedy tych książek jako drogi do drugiej kariery – autora książek popularyzujących matematykę czy szerzej: naukę. Patrząc jednak na to z dzisiejszej pozycji, była to część procesu prowadzącego mnie w tym kierunku.

Nalezy dodać, że wszystkie twoje książki są na bardzo wysokim poziomie, przebija z nich twoja niezwykle szeroka wiedza o nowoczesnej matematyce, i nie tylko o matematyce. Jak to możliwe?

Bardzo dużo czytam. Staram się nie tracić kontaktu z dziedzinami matematyki spoza mojej działki. W okresie, gdy często występowałem w radiu, bycie na bieżąco z tematami, które interesowały BBC, było konieczne – i robię to nadal. Interesuje mnie cała matematyka – na tyle, na ile jest to w ludzkiej mocy. Przeważnie jednak moja wiedza jest na dość pobieżnym poziomie – głównych idei, twierdzeń i ich zastosowań. Poza tym, zajmując się układami dynamicznymi, musisz wiedzieć sporo z różnych dziedzin.

Trochę ryzykuję, biorąc się za dość zaawansowane tematy i pisząc bardziej szczegółowo, niż robiliby to niektórzy autorzy różnych popularnonaukowych pozycji. Wygląda na to, że czytelnikom się to podoba – gdyby było inaczej, przestaliby kupować moje książki. Sądzę, że ważne jest, aby matematyki za bardzo nie „rozwadniać". Przez lata rozwijałem rozmaite metody, dzięki którym zaawansowane idee stawały się bardziej zrozumiałe.

Powiedz coś więcej o twojej twórczości science fiction.

Odkryłem science fiction, gdy miałem około piętnastu lat – powieści w miękkich okładkach w miejscowym antykwariacie. Z moim kolegą Johnem Hartem współzawodniczyliśmy w gromadzeniu jak największej kolekcji – moja liczy obecnie ponad osiem i pół tysiąca książek i czasopism oraz różne inne rze-

czy, jak duży kartonowy Yoda z Gwiezdnych Wojen, którego wyrzucił supermarket Sainsbury's, a mój syn Chris zabrał i dał mi jako prezent bożonarodzeniowy. Mam też sporo pamiątek związanych ze Światem Dysku – ale o tym za chwilę.

W roku akademickim 1977–1978 byłem z rodziną na University of Connecticut w Storrs. Tego roku, podczas trzech dużych zamieci, spadło ponad dwa metry śniegu. Wróciliśmy z wycieczki do Annapolis i musieliśmy dokopać się do domu. Wcześniej napisaliśmy z Timem Postonem artykuł naukowy dla czasopisma fantastycznonaukowego *Analog*, którego wydawca, Ben Bova, mieszkał w Hertford, około trzydziestu mil stamtąd. Zaprosił nas pewnego wieczoru i zasugerował, żebym spróbował sił w pisaniu opowiadań science fiction. Avril kupiła na pchlim targu pudełko pełne części od starej maszyny do pisania i dała mi je, mówiąc: „oto coś, co możesz robić w czasie takiej zimy". Gdy poskładałem maszynę, niczego jej nie brakowało i działała – miała nawet taśmę. Napisałem więc na niej opowiadanie *And master of one*, i wysłałem Benowi do oceny. W odpowiedzi przysłał czek. Ukazało się wkrótce w *Analog* w czerwcu 1979 roku. Głównym bohaterem był Billy Joat. „Joat" to skrót od „Jack of all trades"[14], określenia wymyślonego przez Philipa José Farmera w *Kochankach*. Niedawno sam wydałem książkę *Jack Of All Trades*, w której zebrałem wszystkie historie o Joacie i parę innych w jednej powieści.

Pisywałem opowiadania science fiction, ale nic większego. W 1990 roku w Warwick odebrałem telefon. „Dzień dobry, mówi Jack Cohen, biolog. Mam pytanie o pańską książkę o teorii chaosu. Czy możemy się spotkać?". Zjedliśmy wspólnie lunch w pubie w Kenilworth i po czterech godzinach wciąż tam siedzieliśmy, odkrywszy, że biolog i matematyk mogą mieć więcej wspólnego niż się spodziewali. Zostaliśmy przyjaciółmi i współpracownikami. Napisaliśmy razem trzy książki popularnonaukowe – *Załamanie chaosu* (opartą na czterech latach rozmów w pubach), *Wytwory rzeczywistości* i *What Does a Martian Look Like?*.

Jack był wielkim wielbicielem science fiction; napisaliśmy razem również dwie powieści fantastycznonaukowe: *Wheelers*, której skomplikowaną fabułę wzięliśmy „z kapelusza" w czasie długiej jazdy samochodem – jechaliśmy, by wystąpić jako goście w teleturnieju naukowym w radiu BBC – i jej kontynuację, *Heaven*. Istnieje też nieopublikowany *prequel*, zatytułowany *Oracle* – Jack wymyślił fabułę, ja napisałem tekst. Jestem w trakcie szukania wydawcy. *Wheelers* było książką, której w 2000 roku Science Fiction Book Club w USA sprzedał najwięcej egzemplarzy.

[14] W języku angielskim używa się tego określenia na osobę znającą się po trosze na wszystkim.

Kulminacją naszych wspólnych działań był ciąg czterech książek *Nauka Świata Dysku* (zresztą przetłumaczonych na polski) z Jackiem i Terrym Pratchettem. Oni znali się jeszcze z czasów, gdy Terry był początkującym młodym dziennikarzem, a zetknęli się dzięki ich wspólnej miłości do science fiction. Jack poznał nas ze sobą na corocznym konwencie Birmingham SF Group Novacon w 1990 roku, gdy Terry – wtedy już sławny pisarz sprzedający miliony książek – pojawił się bez zapowiedzi, jako miłośnik fantastyki wracający do korzeni.

Widywaliśmy się od czasu do czasu i na jednym z konwentów, po ucieczce przed hotelowym jedzeniem trafiliśmy do mongolskiej restauracji koło Dudley. Rozmowa zeszła nam na książki „wyjaśniające" domniemaną „prawdziwą naukę" w serialach pokroju *Star Treka* i zaczęliśmy się zastanawiać, czy dałoby się zrobić coś podobnego w Świecie Dysku. Uzgodniliśmy, że byłoby to świetne wykorzystanie tak lubianych przez Terry'ego historii o magach, wiedźmach, trollach i wampirach do przekazania szerszej publiczności wybranych aspektów tej prawdziwej nauki. Nie chodziło nam o edukację – czuliśmy, że powinniśmy raczej zwiększać ogólną znajomość nauki, popularyzować. Jednak Terry przeczuwał problem. „W Świecie Dysku nie ma nauki. Tam wszystko działa na zasadzie magii. Smoki nie zioną ogniem dlatego, że połknęły coś palnego. Smoki zioną ogniem, bo są smokami".

Jakieś pół roku później wymyśliliśmy na to sposób: „Terry, skoro w Świecie Dysku nie ma nauki, możesz ją tam jakoś wetknąć?". Wpadliśmy na pomysł, że magowie Niewidocznego Uniwersytetu powinni powołać do istnienia Projekt „Świat Kuli", magiczne pole siłowe rozmiarów piłki nożnej, zawierające cały prawdziwy wszechświat. Magia nie ma do niego dostępu, więc w środku wszystko działa na zasadach nauki. Magowie byliby zaskoczeni i wściekli, że są tam takie dziwactwa, jak okrągłe światy z czymś zwanym „grawitacją", żeby ludzie z dolnej części nie spadli, zamiast takich rozsądnych płaskich światów, jak Dysk. Rozdziały o nauce dotyczyłyby prawdziwej nauki w tym świecie, tyle że byłyby osadzone fabularnie w Świecie Dysku. Terry mógłby więc napisać opowiadanie z akcją w Świecie Dysku, z paroma miejscami, w których moglibyśmy z Jackiem wstawić naukę. W ten sposób krótkie opowiadanie byłoby poszatkowane „bardzo dużymi przypisami" dotyczącymi nauki. Zadziałało to fantastycznie, zmieniło nasze życie i Jack zawsze uważał to za jedno z osiągnięć, z których był najbardziej dumny. Wielbiciele Świata Dysku domagali się kontynuacji i wraz z Jackiem zostaliśmy stałymi bywalcami konwentów światodyskowych. Czasami dołączaliśmy do maratonów autografowych Terry'ego – zwykle pięciogodzinnych.

Innym skutkiem było to, że w 2017 roku byłem honorowym gościem naukowym na Worldcon75 (siedemdziesiątym piątym Światowym Konwencie Science Fiction) w Helsinkach.

Jak powiedziałeś, dużo czytasz. Jakie są twoje ulubione książki i autorzy?

Jeżeli chodzi o science fiction, lubię przede wszystkim Larry'ego Nivena, Davida Brina, Gregory'ego Benforda, Paula McAuleya, Petera Hamiltona, Alastaira Reynoldsa, Iana M. Banksa i mojego przyjaciela Stephena Baxtera. Wszyscy oni piszą twarde science fiction o dalekiej przyszłości w stylu *high concept*[15]. Innym moim ulubionym pisarzem jest Jack Vance, który pisze w charakterystycznym i eleganckim stylu. Oczywiście Pratchett – jego książki zalicza się do fantasy, ale są one wewnętrznie logiczne, i to solidnie, jak science fiction. Podobają mi się *Gwiazda Imperium* Samuela R. Delany'ego, *Wasp* Erica Franka Russella, i – nie bardzo wiem czemu, bo literacko nie są to pozycje najwyższego lotu – seria *Lensman* E. E. Smitha.

Obecnie czytam mnóstwo e-booków na moim czytniku, choćby po to, żeby zaoszczędzić miejsce na półkach. Czytam też sporo powieści detektywistycznych. Lubię te napisane przez Andreę Camillerego o inspektorze Montalbano, których akcja dzieje się na Sycylii. Prawdę mówiąc, dowiedziałem się o nich na Sycylii, gdzie byłem na wycieczce archeologicznej. Są bardzo sycylijskie, z zabawnymi bohaterami i dobrą fabułą. Mój niezmienny entuzjazm budzi *Gödel, Echer, Bach* Douglasa Hofstadtera. Wraz z Avril interesujemy się egiptologią, więc mamy łącznie około sześćdziesięciu książek o starożytnym Egipcie.

Jak spędzasz czas wolny, gdy przypadkowo zdarzy ci się go mieć?

Prowadzimy amatorsko z Avril zajęcia z egiptologii, należymy do miejscowego stowarzyszenia geologicznego. Chadzaliśmy na siłownię, ale teraz po prostu codziennie przez godzinę spacerujemy. Poczesne miejsce zajmują podróże, często archeologiczne, ale również safari, na których fotografujemy zwierzęta. Im jesteśmy starsi, tym bardziej lubimy przygody. W ostatnich kilku latach byliśmy w Hong Kongu, Peru, Galapagos, na Wyspie Wielkanocnej, w Laosie, Kambodży, Botswanie, Namibii, Tanzanii i Indiach (żeby zobaczyć tygrysy w parkach narodowych). Siedem razy byliśmy w Egipcie, odwiedziliśmy też Jordanię i Japonię. Avril dorastała w Nowej Zelandii, więc bywamy tam raz na parę lat. Z okazji moich sześćdziesiątych urodzin nurkowaliśmy w Wielkiej Rafie Koralowej w Australii. Odpoczywamy na Barbados (dotąd byliśmy tam czternaście razy). Oczywiście, nie wspominam o Ameryce, Kanadzie i Europie. Na razie koronawirus wstrzymał podróże.

[15] Styl artystyczny, w którym – mówiąc poglądowo – dzieło opiera się na pewnej zwięźle sformułowanej przesłance.



Avril Stewart, Ian Stewart, Krzysztof Ciesielski i Danuta Ciesielska
pod Collegium Novum UJ w Krakowie w czerwcu 2002

Na koniec opowiedz może o jakichś zabawnych historiach, w których brałeś udział, lub o których słyszałeś i jesteś pewien, że są prawdziwe – oczywiście, mam na myśli historie związane z matematyką lub matematykami.

Oto jedna dotycząca mnie. Miałem udzielić krótkiego wywiadu o matematyce dla telewizji i BBC stwierdziło, że chce go nagrać na stadionie Wembley. Tego dnia nie było meczu i powiedziano mi, że będzie miło i cicho. Spędziliśmy około godziny ustalając, co i gdzie będziemy filmować, i właśnie mieliśmy zacząć, gdy pojawili się uczniowie, w liczbie około stu – stadion zorganizował dzień otwarty dla dzieci. Wcisnęliśmy więc nasz wywiad w króciutkie odstępy między

wizytami kolejnych setek. Sekundy po tym, jak skończyliśmy nagrywać ostatnią część, robotnicy na dachu z olbrzymim hałasem strącili część rusztowania.

A oto inna, związana z wykładem bożonarodzeniowym w telewizji (mieliśmy między innymi żywego tygrysa w audytorium, ale to inna historia). W jednej z części mieliśmy stłuc czajniczek do herbaty, niby bardzo cenny, a potem puścić film od tyłu, żeby pokazać, jak „sam" się składa z powrotem. Miało to zilustrować strzałkę czasu. „Wylosowaliśmy" dziecko z widowni (w rzeczywistości był to syn producenta, który wiedział, co ma robić). Kiedy upuścił czajniczek, ten odbił się od podłogi. W końcu musiałem cisnąć czajniczek na ziemię naprawdę mocno, żeby go stłuc, udając, że tracę cierpliwość.

Najzabawniejsze opowieści dotyczą mojego zmarłego w 2019 roku przyjaciela Jacka – ale on był biologiem. Historia z małpą, kurczakami i „jasno-ciemnym eksperymentem doktora Cohena" jest arcyzabawna. Biologów niezmiennie bawi do dziś.

Czy mógłbyś tę historię opowiedzieć?

W latach siedemdziesiątych Jack badał ptasie pióra i miał w laboratorium pomieszczenie pełne kurczaków w klatkach. W tej samej „zwierzęcej izbie" trzymał też małpę. Uratował ją, zabierając pewnym ludziom, którzy hodowali tę małpę jako zwierzę domowe, ale nie mieli pojęcia, jak się nią zajmować. Kurczaki miał oglądać jakiś ważny urzędnik rządowy, o nazwisku brzmiącym jak Pułkownik Odling-Smee[16]. Rano w dniu inspekcji, gdy Jack poszedł sprawdzić, co słychać u kurczaków, w drzwiach przywitały go dwie laborantki.

– Nie wchodź tam! – powiedziały mu. – Wymyśl jakiś sposób, żeby opóźnić inspekcję o pół godziny, do tego czasu wszystko będzie w porządku.

Jack zrobił, jak mu kazały, i popędził do dyrektora instytutu.

– Kiedy zjawi się inspektor, musimy trzymać go z dala od pokoju z kurczakami tak długo, jak tylko możliwe – powiedział.

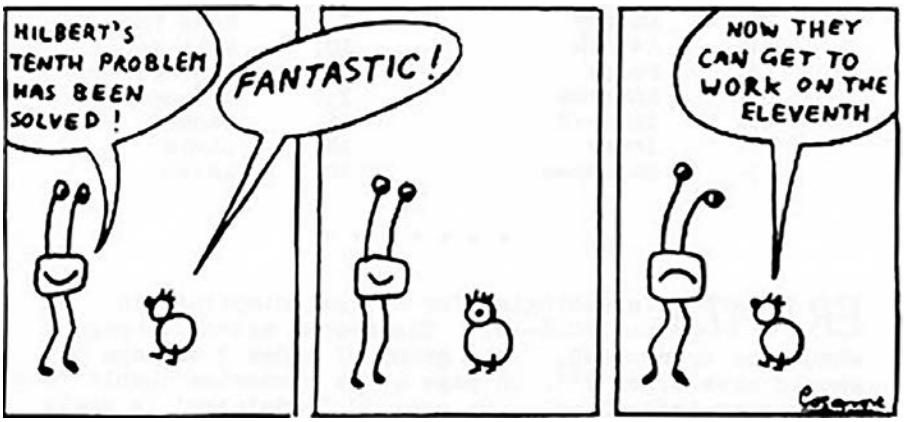
– Dlaczego?

– Nie mam pojęcia, po prostu musimy. Hm... Poczęstuj go sherry. Powiedz mu, że masz dziś urodziny.

Dyrektor, formalista aż do przesady, choć niechętnie, ale się zgodził. Inspektor był nieco zdziwiony, ale skoro to były urodziny dyrektora, uznał, że nie wypada odmówić drinka. A potem drugiego.

W końcu jednak nalegania inspektora przyniosły efekt i pokazano mu pomieszczenie ze zwierzętami. Było w idealnym porządku, ale wszystkie klatki

[16] Pułkownik A. J. Odling-Smee był w 1945 roku dowódcą 36 Brygady armii brytyjskiej. Z kolei John Odling-Smee to znakomity uczony, biolog z Oxfordu.



Manifold, nr 14 (wiosna 1973)

były przykryte płótnem z przyczepionymi kartkami „Jasno-ciemny eksperyment dra Cohena. NIE WYSTAWIAĆ NA DZIAŁANIE ŚWIATŁA". Spod płótna co jakiś czas dochodziło ciche gdakanie.

– Nie mogę chociaż zerknąć? – zapytał inspektor.

– Przykro mi, ale to by zrujnowało trzy miesiące pracy – odpowiedział Jack, zastanawiając się, o co tu właściwie chodzi, czując jednak konieczność kontynuacji dziwnego przedstawienia.

Gdy inspektor odszedł, Jack i dyrektor poprosili laborantki o wyjaśnienia. One podniosły płótna – okazało się, że kurczaki w klatkach są co prawda zdrowe, ale całkowicie pozbawione piór.

– Kiedy weszłyśmy, cały pokój tonął w piórach. Małpa się uwolniła i oskubała wszystkie kurczaki.

Dziękuję za rozmowę.

Rozmowę przeprowadził Krzysztof Ciesielski[17] (Kraków)
i.n.stewart@warwick.ac.uk
krzysztof.ciesielski@im.uj.edu.pl

[17] Dziękuję Marcinowi Borkowskiemu za nieocenioną pomoc w przekładzie wywiadu na język polski.

Wiad. Mat. 56 (1) 2020, 125–128
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Ian Stewart (Warwick)

Dziwny wieczór (An Odd Evening)*

Nad pofałdowanymi angielskimi łąkami, lasami, polami łagodnie i powoli zapada zmierzch, a nasz bohater, doktorant Rosen Crantz przedstawia swoje ostatnie pomysły promotorowi. Jest nim profesor Guilden Stern, specjalista z teorii liczb, nie odnoszący jednak zbyt wielu sukcesów.

Crantz: Guilden, mam kłopoty z moim ostatnim problemem.

Stern: Z którym? Liczby pierwsze?

Crantz: Tak. Zamierzałem udowodnić twierdzenie dla każdej liczby pierwszej po kolei, korzystając z pracy Randy'ego i Hartlisnujama...

Stern: Masz na myśli *A complete list of all prime numbers*, w *Journal of Infinity* – na razie w 173 tomach?

Crantz: Tak, ale oni, jak dotąd, opublikowali tylko *parzyste* liczby pierwsze. Nie skończyli tego jednak i sądzę, że gdzieś utknęli.

Stern: Parę tygodni temu dostałem list od Hartlisnujama. Napisał, że wystartowali od 2 – to jest, oczywiście, liczba pierwsza – i zdecydowali przebadać najpierw wszystkie liczby parzyste w nadziei, że znajdą jeszcze jakieś pierwsze. W badaniach doszli już do 1355579014264890988, ale nic nie znaleźli.

Crantz: Może nie ma żadnej innej parzystej liczby pierwszej.

Stern: Ale wobec tego co z twierdzeniem Dirichleta? Wiesz, tym, które orzeka, że w każdym ciągu arytmetycznym jest nieskończenie wiele liczb pierwszych. Liczby parzyste tworzą ciąg arytmetyczny, prawda?

Crantz: Tak sądzę. Zapomniałem już wiele z tego, czego uczono mnie w szkole. Zagadkowa sprawa.

---

* *An odd evening* ukazał się w numerze 12 (Summer 1972) pisma *Manifold*. Polski przekład został opublikowany w numerze 7/1987 *Delty* (była to pierwsza pozycja autorstwa Stewarta wydana po polsku) oraz później w książce K. Ciesielskiego i Z. Pogody *Bezmiar matematycznej wyobraźni*. Prawa autorskie do tekstu należą do Iana Stewarta.

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Stern: Może Dirichlet popełnił błąd? Bo o tym, że zrobił błąd w swojej zasadzie, to wiesz.

Crantz: A nie był to przypadkiem Riemann? W każdym razie brzmi to nieprawdopodobnie. Może potrafilibyśmy *dowieść*, że istnieje nieskończenie wiele parzystych liczb pierwszych?

Stern: Modyfikując dowód Euklidesa dla dowolnych liczb pierwszych – to masz na myśli?

Crantz: Dokładnie to. Rozważmy właśnie *parzyste* liczby pierwsze i zobaczmy, co się stanie. Przypuśćmy, że istnieje ich skończenie wiele...

Stern: Możemy pominąć 2, o tym wiemy...

Crantz: Przypuśćmy więc, że istnieje tylko skończenie wiele parzystych liczb pierwszych większych niż 2, powiedzmy $p_1, \ldots, p_n$. Co teraz? Euklides definiuje $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ i...

Stern: To nie jest dobrze; to jest *nieparzyste*.

Crantz: Faktycznie nieparzyste[1]; to faktycznie dziwne.

Stern: Ha. Więc czemu nie zdefiniować $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 2$?

Crantz: OK. Wtedy P jest parzyste, więc musi być podzielne przez jakąś parzystą liczbę pierwszą, powiedzmy q. I q nie może być żadną z p_i, gdyż jeśli podzielisz P przez którąkolwiek z nich, to dostajesz resztę 2...

Stern: ...i nie może być równe 2, gdyż jeśli 2 dzieli P, to dzieli także $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, i dzieli którąś spośród p_i, ale p_i jest liczbą pierwszą i jest większe niż 2, więc nie może być podzielne przez 2.

Crantz: Więc q jest parzystą liczbą pierwszą różną od 2, $p_1, \ldots, p_n$,...

Stern: Sprzeczność z założeniem. Wobec tego musi istnieć nieskończenie wiele parzystych liczb pierwszych.

Crantz: Istotnie, musi tak być. Dirichlet mimo wszystko miał rację.

Stern: Napiszę o tym do Hartlisnujama.

Crantz: Ale czy to pomoże w rozwiązaniu mojego problemu?

Stern: Jaki jest twój problem?

Crantz: Och... Cóż... Myślę, że moja dziewczyna jest...

Stern: Twój *naukowy* problem.

Crantz: Ach, tak. To coś w rodzaju odwrócenia hipotezy Goldbacha.

Stern: Masz na myśli: „każda liczba parzysta jest sumą dwóch liczb pierwszych"?

Crantz: Tak. Chciałem udowodnić, że każda liczba pierwsza jest sumą dwóch liczb parzystych. Gdybym mógł to wykazać, to...

[1] Nieprzetłumaczalna gra słów; w oryginale „very odd".

Stern: Ale to jest fałszywe, nieprawdaż? Bo co z 3? Gdyby 3 było sumą dwóch liczb parzystych, to jedna z nich musiałaby być równa 2... Drugą jest zatem 1. Ale to jest nieparzyste.

Crantz: Faktycznie nieparzyste; to faktycznie dziwne.

Stern: Ha. Musisz coś jeszcze założyć. Na przykład – że twoja liczba pierwsza jest *parzysta*?

Crantz: Myślałem o tym. Ale przypuśćmy, że mamy parzystą liczbę pierwszą q i załóżmy, że $q = x + y$, przy czym x i y są parzyste – powiedzmy $x = 2u$ i $y = 2v$. Wtedy $q = 2(u + v)$, więc 2 dzieli q. Ale q jest liczbą pierwszą – sprzeczność.

Stern: To obala hipotezę dla parzystych liczb pierwszych.

Crantz: Istotnie? Nigdy bym nie przypuszczał...

Stern: Oznacza to, że teraz potrzebujesz tylko przebadać nieparzyste liczby pierwsze.

Crantz: Ale nie mogę przecież czekać, aż Randy i Hartlisnujam je wszystkie znajdą...

Stern: W porządku. W każdym razie rozpatrzyłeś połowę możliwych przypadków.

Crantz: A także 3 – to twój rezultat.

Stern: Wobec tego napisz to i opublikuj. Jeśli kiedyś przebadasz nieparzyste – będziesz miał dwie publikacje zamiast jednej.

Crantz: Myślałem, że raczej bierze się pod uwagę *wagę* publikacji, a nie ich liczbę?

Stern: Nie, tak było zanim zaczęto wytłaczać *Pięcioksiąg* na kamiennych tablicach. Pięć publikacji – i jesteś wykładowcą, piętnaście – starszym wyk...

Crantz: Czekaj! Czekaj! Gdzie w dowodzie założyliśmy, że q jest parzyste?

Stern: Och, gdzie w... Nie! Nie założyliśmy! Ten sam dowód idzie dla nieparzystych liczb pierwszych!

Crantz: Widzę to teraz! *Falsity of the Converse Goldbach Conjecture* – napisał R. Crantz –

Stern: I G. Stern...

Crantz: Tak. Opublikujemy to w *Notices*...

Stern: W *Journal*...

Crantz: W *Bulletin*...

Stern: W *Proceedings*...

Crantz: W *Transactions*...

Stern: W *Annals*!

Crantz: W *Ivanov Gos. Ped. Inst. Uč. Zap. Fiz.-Mat. Nauki*...

Stern (*uderzając go po plecach*): Złapał cię jakiś brzydki kaszel.

Crantz: Cóż za referencje!

Stern: Sława! W końcu – sława! Czekaj, niech no tylko spotkam Stefka Smale'a...

Crantz: Możemy to przedstawić na Międzynarodowym Kongresie Matematyków. Moglibyśmy dostać medal Fieldsa.

Stern: *Dwa* medale Fieldsa.

Crantz: Zostanę błyskawicznie profesorem. Wiesz, że mianują ich tysiącami? Nieograniczona masowa produkcja profesorów, którzy mają forsy jak lodu. Słyszałem, że jeden z nich ostatnio sprzedał swoją trzynastowieczną piwnicę[2]...

Stern: Nie, naprawdę?

Crantz: I nie musiałbym mieć trzydziestu jeden publikacji i dwóch...

Stern: Mógłbym mieć tournée z wykładami po USA!

Crantz: Coś w stylu Malcolma Muggeridge'a[3]?

Stern: Nie całkiem. Raczej Charlesa Dickensa lub – jak się nazywał ten facet z Ameryki?

Crantz: Twain?

Stern: Ach, nie; ja wynająłbym samochód.

Crantz: I mógłbym wygłosić cykl wykładów w Paryżu – obiad na Sorbonie, kolacja w Instytucie – mógłbym nawet spotkać się z Bourbakim! Tak! Tak! (*Nagle przerywa, zaskoczony*). Czekaj. Co z 2?

Stern: 2?

Crantz: 2.

Stern: Co z tym? No, mów! Szybko!

Crantz: $2 = 0 + 2$.

Stern: Wspaniale.

Crantz: 2 jest liczbą pierwszą. 0 i 2 są parzyste.

Stern: A niech to licho!

Crantz: Może udałoby się to jakoś naprawić?

Stern: Ale gdzie założyliśmy, że one są różne od zera? Nie widzę tego. To dziwne.

Crantz: To faktycznie dziwne.

Ian Stewart
Mathematics Institute
University of Warwick
tłumaczenie: Krzysztof Ciesielski, Zdzisław Pogoda

[2] Tekst został napisany wkrótce po tym, gdy Erik Christopher Zeeman przeprowadził się do bardzo starego domu, z piwnicą podobno aż z XIII wieku.

[3] Malcolm Muggeridge był angielskim dziennikarzem i uczonym, do końca lat sześćdziesiątych aktywnie działającym agnostykiem, a parę lat przed napisaniem tekstu dołączył do kościoła protestanckiego; pisał liczne artykuły oraz produkował programy telewizyjne na temat wiary.

Wiad. Mat. 56 (1) 2020, 129–141
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

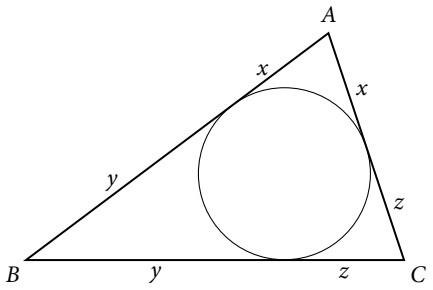
Krzysztof Ciesielski (Kraków)

O podstawieniu Raviego

Wśród zadań związanych z nierównościami są też takie, w których występują liczby będące długościami boków pewnego trójkąta. Pojawiają się w różnego rodzaju konkursach matematycznych czy olimpiadach – tak krajowych, jak i międzynarodowych. Wielokrotnie okazuje się, że można je szybko rozwiązać, stosując tak zwane *podstawienie Raviego*. O nim (przede wszystkim) będzie w tym tekście mowa.

1. Podstawienie

Załóżmy, że badana nierówność dotyczy boków trójkąta o długościach a, b i c.



Oznaczmy standardowo wierzchołki tego trójkąta (tzn. bok o długości a leży naprzeciwko wierzchołka A itd.). Wpiszmy w ten trójkąt okrąg. Z twierdzenia o odcinkach stycznych wiemy, że długości odcinków poprowadzonych z wierzchołka A do punktów styczności tego okręgu z bokami AB i AC są równe

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

(przyjmijmy, że wynoszą x), analogicznie równe są długości odpowiednich odcinków o końcach w B (tę długość oznaczmy przez y) oraz w C (oznaczmy ją przez z). Możemy więc zapisać: $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$ i podstawić nowe zmienne do rozważanej nierówności.

Oto parę przykładów zastosowania tego podstawienia. Najpierw same treści zadań – dla czytelników mających ochotę na samodzielne rozwiązywanie. Przyjmujemy oznaczenia podane wyżej. We wszystkich zadaniach zakładamy, że a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta.

Zadanie 1.1. Wykazać, że jeśli obwód trójkąta ABC jest równy 1, to

$$\frac{1+a}{1-2a} + \frac{1+b}{1-2b} + \frac{1+c}{1-2c} > 6.$$

Zadanie 1.2. Wykazać, że

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant 3.$$

Zadanie 1.3. Udowodnić, że

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Zadanie 1.4. Wykazać nierówność:

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leqslant 3abc.$$

Zadanie 1.5. Udowodnić, że

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-b) \geqslant 0.$$

Zadanie 1.6. Wykazać, że

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leqslant abc.$$

Rozwiązanie zadania 1.1. Po zastosowaniu podstawienia Raviego i wykorzystaniu założenia, że $2x + 2y + 2z = 1$ lewa strona nierówności przyjmuje postać

$$\frac{3x+3y+2z}{2z} + \frac{3y+3z+2x}{2x} + \frac{3x+3z+2y}{2y}$$

i po dalszych przekształceniach

$$3+\frac{3x+3y}{2z}+\frac{3y+3z}{2x}+\frac{3z+3x}{2y}=3+3\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\right],$$

a ta liczba jest większa lub równa 9, więc udowodniliśmy nierówność znacznie mocniejszą. □

Zadanie 1.1 wzięte jest z książki [10], w której autor jako źródło podaje Petersburską Olimpiadę Matematyczną w 1997 roku.

Rozwiązanie zadania 1.2. Po zastosowaniu podstawienia Raviego nierówność sprowadza się do

$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}\geqslant 6,$$

a po pomnożeniu obu stron przez xyz do

$$\frac{xy^2+xz^2+yx^2+yz^2+zx^2+zy^2}{6}\geqslant xyz.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa na podstawie nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną ($xyz=\sqrt[6]{x^6y^6z^6}$). □

To zadanie pochodzi z książki W. W. Prasołowa [15, zad. 9.10]. Następne zadanie zostało postawione w 1996 roku uczestnikom zawodów międzynarodowych Asian Pacific Mathematics Olympiad[1].

Rozwiązanie zadania 1.3. Problem sprowadza się do wykazania nierówności

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\leqslant\sqrt{2}(\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}),$$

która wynika natychmiast z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową, zastosowanej dla par liczb $(\sqrt{x},\sqrt{y})$, $(\sqrt{y},\sqrt{z})$ i $(\sqrt{z},\sqrt{x})$. □

Rozwiązanie zadania 1.4. Stosujemy podstawienie Raviego. Po prostych obliczeniach okazuje się, że wystarczy udowodnić nierówność

$$x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y\geqslant 6xyz,$$

czyli – po podzieleniu obu stron przez 6 – tę samą, która pojawiła się w rozwiązaniu zadania 1.2. □

[1] Są to zawody, w których startuje młodzież z krajów otaczających Ocean Spokojny. Uczestnicy nie mogą mieć ukończonych 20 lat. Pierwszy raz olimpiada ta odbyła się w 1989 roku.

W dzisiejszych czasach może się jednak zdarzyć, że zawodnik po ostrym „treningu olimpijskim" nie będzie w tym miejscu korzystał z nierówności między średnimi, lecz zakończy rozwiązanie stwierdzeniem, że jest to natychmiastowy wniosek z nierówności Muirheada[2]. Tymczasem wielu absolwentów studiów matematycznych nigdy o tej nierówności nie słyszało[3].

Ogólne sformułowanie nierówności Muirheada jest dość długie, przywołamy je tu w przypadku wielomianów trzech zmiennych. Zacznijmy od definicji. Jeśli dane są ciągi nieujemnych liczb całkowitych (a_1, a_2, a_3) oraz (b_1, b_2, b_3), to mówimy, że (a_1, a_2, a_3) majoryzuje (b_1, b_2, b_3), gdy $a_1 \geqslant b_1$, $a_1 + a_2 \geqslant b_1 + b_2$ i $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$. Na przykład ciąg $(4, 1, 0)$ majoryzuje ciąg $(2, 2, 1)$. Dla danego ciągu nieujemnych liczb całkowitych (c_1, c_2, c_3) przez $W^{(c_1,c_2,c_3)}(x_1, x_2, x_3)$, oznaczamy odpowiedni wielomian symetryczny trzech zmiennych (czyli sumę wszystkich permutacji zmiennych podniesionych do potęg c_1, c_2, c_3) – na przykład $W^{(3,1,1)}(x, y, z) = x^3y^1z^1 + x^3y^1z^1 + x^1y^3z^1 + x^1y^3z^1 + x^1y^1z^3 + x^1y^1z^3 = 2x^3yz + 2xy^3z + 2xyz^3$. Twierdzenie o nierówności Muirheada orzeka, że jeśli x_1, x_2, x_3 są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3$ oraz ciąg (a_1, a_2, a_3) majoryzuje ciąg (b_1, b_2, b_3), to $W^{(a_1,a_2,a_3)}(x_1, x_2, x_3) \geqslant W^{(b_1,b_2,b_3)}(x_1, x_2, x_3)$. W naszym przypadku – $(2, 1, 0)$ majoryzuje $(1, 1, 1)$, $W^{(2,1,0)}(x, y, z) = x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y$, a $W^{(1,1,1)}(x, y, z) = 6xyz$.

Dowód nierówności Muirheada jest trudny. Nasuwa się pytanie – czy Olimpiada Matematyczna powinna polegać na tym, że uczniowie podczas rozwiązywania zadania wykorzystują rozmaite zaawansowane twierdzenia? Niestety, ruch olimpijski nieuchronnie coraz bardziej zmierza w tę stronę. Organizowane są obozy przygotowujące uczniów do olimpiady (co w Polsce w pierwszym ćwierćwieczu Olimpiady nie miało miejsca) i kółka matematyczne (w znacznie większym wymiarze niż dawniej). Praktycznie niewyczerpanym źródłem informacji stał się Internet. Oczywiście, z jednej strony należy się cieszyć, że młodzież nawiązuje liczne kontakty i zdobywa nową wiedzę. Z drugiej strony jednak uczniowie trenowani w ten sposób, głównie z tak zwanych stajni olimpijskich, zyskują na samym początku ogromną przewagę nad pozostałymi. Ponadto Olimpiada nie powinna polegać na uczeniu się rozmaitych, często

[2] Robert Franklin Muirhead (1860–1941), szkocki matematyk, znany przede wszystkim z nierówności (opublikowanej w 1903 roku) noszącej jego imię.

[3] W szczególności autor tego tekstu dowiedział się o niej dopiero po ponad dwudziestu latach pracy w Komitecie Okręgowym Olimpiady Matematycznej w Krakowie, gdy niektórzy zawodnicy stosowali ją – pisząc zresztą nazwisko „Muirhead" na wiele różnych sposobów – do rozwiązania pewnego zadania z zawodów II stopnia. Nie był jedyny; jak się okazało, wówczas z jedenastu członków tego Komitetu o nierówności Muirheada słyszał tylko jeden, najmłodszy.

zupełnie ze sobą nie związanych, faktów (nieraz bez ich dowodów), które mogą się kiedyś na zawodach przydać.

Zadanie 1.4 pochodzi z 6 Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej w 1964 roku. W sprawozdaniu z polskiej Olimpiady Matematycznej [14], poprzedzającej tę międzynarodową olimpiadę, podane jest jego jedno rozwiązanie, a w odpowiednim tomie zadań z olimpiad matematycznych [17] dodatkowo drugie; żadne z nich nie wykorzystuje podstawienia Raviego.

Zadanie 1.5, które pojawiło się na 24 Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej w 1983 roku, jest trudniejsze, ale łatwe zadania rzadko się tam zdarzają.

Rozwiązanie zadania 1.5. Po zastosowaniu podstawienia Raviego okazuje się, że należy wykazać nierówność

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geqslant x^2yz + y^2xz + z^2xy.$$

Teraz wystarczy zastosować nierówność Cauchy'ego–Schwarza dla wektorów $(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z})$ oraz $(\sqrt{yz^3}, \sqrt{zx^3}, \sqrt{xy^3})$ i potem podzielić obie strony przez $x + y + z$. Dowód nierówności Cauchy'ego–Schwarza dla trójek liczb rzeczywistych jest już elementarny i ta nierówność jest olimpijczykom zazwyczaj dobrze znana, choć uczeń, który jej wcześniej nie znał, sam raczej na nią nie wpadnie. □

Zadanie to ma też rozwiązanie nie wykorzystujące podstawienia Raviego, ale wymagające niebanalnych i pomysłowych rachunków.

Poświęćmy teraz trochę uwagi ostatniemu zadaniu. Sformułowaną tam nierówność można znaleźć w różnych miejscach jako przykład zastosowania postawienia Raviego. Istotnie, po podstawieniu okazuje się, że należy wykazać, że

$$xyz \leqslant \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8},$$

a to ponownie jest konsekwencją nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną. Tymczasem nierówność z treści zadania jest jedną z historycznie pierwszych, w których występują (bez innych wielkości związanych z trójkątem, jak na przykład pole czy promienie odpowiednich okręgów) boki trójkąta. Sformułowana została w 1925 roku w pracy [11], której głównym celem był dowód faktu, że jeśli rozważamy trójkąty o danym obwodzie, to promień okręgu opisanego na takim trójkącie jest największy dla trójkąta równobocznego. W tej samej pracy Alessandro Padoa (1868–1937) wykazał również nierówność, sformułowaną wyżej jako zadanie 1.6, obecnie czasami nazywaną *nierównością Padoy*. Jego dowód nie wykorzystywał żadnego znanego podstawienia, a był przepiękny i bardzo krótki! Oto on.

Zauważmy, że

$$(c+a-b)(c+b-a) = c^2 - (a-b)^2 \leqslant c^2,$$

Podobnie $(a+b-c)(a+c-b) \leqslant a^2$ oraz $(b+a-c)(b+c-a) \leqslant b^2$. Z nierówności trójkąta wynika, że wszystkie czynniki po lewych stronach tych trzech nierówności są dodatnie, więc możemy je pomnożyć stronami. Otrzymamy związek $(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2 \leqslant a^2b^2c^2$, z którego wynika teza.

Co ciekawe, nierówność Padoy jest prawdziwa dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych. Istotnie, wystarczy zauważyć, że co najwyżej jedna z trzech liczb $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$ może być ujemna. W efekcie albo po lewej stronie nierówności mamy liczbę ujemną, albo wszystkie trzy czynniki są dodatnie i można powtórzyć poprzednie rozumowanie.

Podsumujmy. Jeżeli mamy do wykazania nierówność, która dotyczy związków między długościami boków trójkąta, to wielce prawdopodobne jest, że w dowodzie podstawienie Raviego okaże się przydatne, co więcej – zazwyczaj rozumowanie wykorzystujące to podstawienie będzie prostsze od innych, choć nieraz nie doprowadzi do tezy bezpośrednio. Może się jednak zdarzyć, że istnieje dowód, który jest krótszy i bardziej elementarny, a bez zastosowania podstawienia Raviego.

Jak się okazuje, za pomocą tego podstawienia można również przeprowadzić dowody rozmaitych klasycznych faktów – na przykład, twierdzenia Eulera z 1763 roku, opublikowanego w pracy [4] i orzekającego, że w dowolnym trójkącie zachodzi związek $\frac{R}{r} \geqslant 2$ (R to promień okręgu opisanego na tym trójkącie, r – promień okręgu wpisanego) czy nierówności $36S \leqslant \sqrt{3}p^2$ (S oznacza pole trójkąta, p zaś połowę obwodu). I to nie wszystko, bo można tę tematykę kontynuować w przypadku pewnych hiperpowierzchni w $\mathbb{R}^4$. Szczegóły opisane są w artykule [18].

2. Ravi

Gdy matematyczny rezultat nosi nazwę związaną z nazwiskiem uczonego, nieraz chciałoby się dowiedzieć czegoś więcej o posiadaczu tego nazwiska. Określenie „podstawienie Raviego" jeszcze kilkanaście lat temu było bardzo rzadkie – obecnie termin ten staje się coraz bardziej popularny. Zazwyczaj jednak czy to w drukowanych źródłach, czy na stronach internetowych pojawia się sam zwrot „podstawienie Raviego" (w różnych językach) i nic więcej. Tymczasem nazwa jest niestandardowa.

Otóż *Ravi* w tym przypadku to nie nazwisko, a imię! Chodzi o znakomitego amerykańskiego matematyka, Raviego Vakila, który jest wybitnym

specjalistą w dziedzinie geometrii algebraicznej, autorem znaczących rezultatów w tym zakresie. Urodził się w 1970 roku, młodość spędził w Kanadzie, studia matematyczne ukończył na Uniwersytecie w Toronto, doktorat uzyskał w 1997 roku na Uniwersytecie Harvarda, przez pewien czas wykładał na uniwersytecie w Princeton i w Massachusetts Institute of Technology, obecnie jest profesorem na Stanford University. Matematyczna aktywność Vakila wykracza daleko poza działalność badawczą. W latach 2002–2012 wspólnie z Michaelem Kleberem redagował w kwartalniku *The Mathematical Intelligencer* kolumnę *Mathematical Entertainments*, zamieszczającą materiały dotyczące „zaraźliwej matematyki, tak eleganckiej, zaskakującej i urokliwej, że natychmiast chce się ją przekazać innym". W 2014 roku został laureatem Nagrody Chauveneta przyznawanej za „mathematical expository writing"[4] za artykuł *The mathematics of doodling*, opublikowany w *American Mathematical Monthly*.

Vakil ma oprócz tego na swoim koncie liczne sukcesy w zawodach matematycznych dla uczniów i studentów. Trzykrotnie zdobywał medale na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej – raz srebrny i dwa razy złote, przy czym w 1987 roku za każde zadanie otrzymał maksymalną liczbę punktów. Jako czwarta osoba w historii uzyskał czterokrotnie (w latach 1988–1991) tytuł *Putnam Fellow* (obecnie takich osób jest osiem). Wyróżnienie to przyznaje się corocznie zdobywcom pierwszych pięciu miejsc w *William Lowell Putnam Mathematical Competition*[5], przy czym w zawodach tych można startować co najwyżej czterokrotnie. Później działał aktywnie w kadrze przygotowującej uczestników rozmaitych zawodów matematycznych. Pięciokrotnie był opiekunem reprezentacji Kanady na Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną. Potem, w latach 2001–2007, był koordynatorem *Putnam Competition* na *Stanford University*. Stale działa na rzecz matematycznie utalentowanej młodzieży.

Nazwa „podstawienie Raviego" pojawiła się na przełomie XX i XXI wieku – najpierw w kręgach związanych z Kanadyjską Olimpiadą Matematyczną (zob. [5]). W ostatnich latach tak sama metoda, jak i nazwa są coraz szerzej rozpowszechniane. Dobrą ilustracją jest zadanie 1.5. W sprawozdaniu z Olimpiady Matematycznej [20] podany jest tylko jeden sposób rozwiązania, ten właśnie bez wykorzystania podstawienia – można więc przyjąć, że on właśnie został podany uczestnikom na Międzynarodowej Olimpiadzie w 1983 roku. Natomiast w zbiorze zadań olimpijskich [2] z lat 1979–1984, wydanym dwanaście lat później,

[4] Nagroda przyznawana jest przez *Mathematical Association of America*, pierwszy raz w 1925 roku, a od 1970 roku corocznie.

[5] Są to doroczne zawody (indywidualne i drużynowe) studentów młodszych lat studiów z USA i Kanady.



Ravi Vakil (fot. Renate Schmid / CC-BY-SA-2.0-DE)

znajdujemy już dwa sposoby, w tym przestawiony wyżej wykorzystujący omawiany trik i nierówność Cauchy'ego–Schwarza (choć bez nazwy „podstawienie Raviego").

Vakil startował w olimpiadach matematycznych w drugiej połowie lat osiemdziesiątych, opiekował się następcami w latach dziewięćdziesiątych – wydaje się niemożliwe, że nikt wcześniej na taki prosty przecież pomysł nie wpadł. Istotnie, istnieją przedstawione w literaturze dowody geometrycznych nierówności oparte na omówionym wyżej triku.

W artykule [7] Murray S. Klamkin omawia m.in. tzw. problem miesiąca czasopisma *Crux Mathematicorum* – jest to przedstawione wyżej zadanie 1.3; jako problem lutego 1999 zaproponował je Jimmy Chui (zaznaczając, że wzięte jest z Asian Pacific Mathematics Olympiad). Jedno z rozwiązań oparte jest na zastosowaniu uogólnienia nierówności Muirheada. Klamkin podaje też rozwiązanie wykorzystujące podstawienie Raviego zaznaczając, że sposób ten był znany, zanim matematyk, od którego imienia pochodzi nazwa, się urodził. Zapewne przez skromność nie pisze, że on sam użył go w nocie [6] w 1971 roku. Tę informację, a oprócz niej jeszcze kilka przykładów wykorzystania tego podstawienia pod koniec XX wieku, podaje jednak autor artykułu [5].

Nie udało mi się nigdzie w literaturze znaleźć tego sposobu opublikowanego wcześniej niż w notce Klamkina. Co ciekawe – w książce [1], której tematem są nierówności geometryczne, wydanej w 1969 roku, znajduje się cały rozdział poświęcony nierównościom dotyczących wyłącznie boków trójkąta, ale żadna z nich nie jest wykazywana za pomocą omawianego tu podstawienia. Może więc istotnie Klamkin był pierwszym, który o tej metodzie napisał?

Poświęćmy jeszcze trochę uwagi paru innym pozycjom. W książce [3] z 1999 roku, w rozdziale o nierównościach, obok zadań wymienionych jest

osiemnaście metod rozwiązywania nierówności, a jedna z nich to właśnie podstawienie: $a = x+y, b = y+z, c = z+x$ w przypadku, gdy a, b, c to długości boków trójkąta. Kilka zadań w książce Prasołowa [15] z 1986 roku jest rozwiązanych za pomocą tego sposobu. Co ciekawe jednak – i w tych, i w innych pozycjach, gdy stosowany jest ów trik bez nazwy „podstawienie Raviego", autorzy wykorzystują zazwyczaj podstawienie algebraiczne:

$$x = \frac{b+c-a}{2}, \quad y = \frac{a+c-b}{2}, \quad z = \frac{a+b-c}{2},$$

bez interpretacji geometrycznej. W szczególności, w książce Prasołowa [15], poświęconej w całości zadaniom dotyczącym geometrii płaszczyzny (a nierówności geometryczne to jedynie skromna jej część), w zadaniu 9.6 należy wykazać, że jeśli liczby a, b, c są bokami trójkąta, to można je przedstawić w postaci $a = y + z, b = x + z, c = x + y$, ale zamieszczone tam rozwiązanie też jest wyłącznie algebraiczne. To zadanie jest wykorzystywane w rozwiązaniach kilku następnych. Również w książce [2], przy rozwiązaniu zadania z olimpiady międzynarodowej, nie ma informacji o tych związkach jako wniosku z twierdzenia o odcinkach stycznych. Nie jest zaskoczeniem, że metoda ta jest podana przez Lwa Kurlandczyka w jednej z jego książek o nierównościach (zob. [8]), ale i Kurlandczyk uzasadnia ją jedynie algebraicznie. Nie potrafię stwierdzić, czy autorzy po prostu patrzyli na ten fakt algebraicznie, czy też uznali, że geometryczne podejście nie jest potrzebne. Moim zdaniem, właśnie w owej geometrycznej interpretacji kryje się duża część uroku tej metody.

Pierwszym drukowanym źródłem, w której znalazłem geometryczną interpretację podstawienia Raviego jest książka [9]. Warto też dodać, że cały rozdział poświęca temu sposobowi Henryk Pawłowski w książce [12], dokładnie uzasadniając geometryczne źródło metody. W obu książkach zwrot „podstawienie Raviego" nie jest używany, trudno się jednak temu dziwić – pierwsza została wydana w 1989 roku, druga w 1994.

3. Odcinki stycznych

I na tym w zasadzie można byłoby opowieść o podstawieniu Raviego zakończyć. Jednak, w nawiązaniu do uzasadnienia tej metody, pozwolę sobie na pewną, moim zdaniem bardzo ważną, dygresję.

Dowód poprawności podstawienia opiera się na klasycznym, prostym i bardzo ładnym fakcie z geometrii elementarnej – twierdzeniu o odcinkach stycznych. Fakt ten znajduje się w programie szkolnym, także w obecnie obowiązującej podstawie programowej. W rozporządzeniu Ministra Edukacji Narodo-

wej z dnia 30 stycznia 2018 roku, w dziale dotyczącym wymagań szczegółowych w treściach nauczania w punkcie VIII.1 czytamy, że „uczeń wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa."

Czemu o tym piszę? Otóż w ostatnich latach w kręgach polskiej młodzieży, przygotowującej się do zawodów olimpijskich, a także – niestety – osób prowadzących z nimi zajęcia, dość często twierdzenie o odcinkach stycznych nosi inną nazwę: „najmocniejszego twierdzenia geometrii" czy „zasadniczego twierdzenia planimetrii". Co gorsza, widziałem takie sformułowania wydrukowane w tekstach pisanych bynajmniej nie przez uczniów. Uważam, że stosowanie tej nazwy jest nie tylko niewłaściwe, ale wręcz szkodliwe i należy je zwalczać.

Dobrze jest, jeśli pewne wyniki matematyczne mają swoje przyjęte powszechnie (a przynajmniej w konkretnych krajach) nazwy. Ułatwia to powoływanie się na nie w matematycznych rozumowaniach. Te nazwy są niemal zawsze dwojakiego charakteru – albo związane są z nazwiskiem uczonego, który niekoniecznie na dany rezultat wpadł jako pierwszy, ale zazwyczaj miał z nim coś wspólnego, albo w nazwie znajduje się termin, którego twierdzenie dotyczy. Wystarczy wziąć dowolny podręcznik matematyczny i obejrzeć indeks przy hasłach „twierdzenie". Po słowie „twierdzenie" jest niemal zawsze albo nazwisko, albo słowo „o" i coś po nim (czasem jedno i drugie, np. twierdzenie Borsuka–Ulama o antypodach). W powszechnym użyciu są: twierdzenie o trzech prostopadłych, twierdzenie o dwusiecznej, twierdzenie sinusów, twierdzenie o trzech ciągach. W przypadku matematyki na poziomie uniwersyteckim można wspomnieć o twierdzeniu o funkcji uwikłanej czy twierdzeniu o rozkładzie jedności. Powody, dla których należy zwalczać to nowe określenie na twierdzenie o odcinkach stycznych widzę co najmniej cztery i moim zdaniem każdy z nich samodzielnie wystarcza, by stosować wyłącznie terminologię dotychczasową.

1. Nazwa, którą tu krytykuję, w przeciwieństwie do dotychczas używanej, nic nie mówi o tym, czego dotyczy twierdzenie.

2. Termin „twierdzenie o odcinkach stycznych" używany jest w polskiej terminologii od bardzo, bardzo dawna. Czy istnieje jakaś sensowna przyczyna, by go zmieniać? Metoda dzielenia wielomianów za pomocą tabelki nosi nazwę *schemat Hornera*[6], choć Horner jedynie opisał ją w podręczniku, napisanym w XIX wieku, a ów sposób był znany już Chińczykom kilka wieków wcześniej. Nie ma żadnych dowodów na to, że Tales udowodnił twierdzenie nazywane w niektórych krajach, w tym w Polsce, jego imieniem. Nazwy przyjęły

[6] William George Horner (1786–1837), angielski matematyk, nauczyciel.

się w Polsce wiele lat temu i rezygnacja z nich wymagałaby naprawdę mocnego uzasadnienia – na przykład eliminacji niepoprawności językowej.

3. Określenie „najmocniejsze twierdzenie geometrii" jest ewidentnie niewłaściwe. Dlaczego niby ten właśnie wynik miałby być najmocniejszym, zasadniczym czy najważniejszym? Bez trudu można podać co najmniej kilka rezultatów klasycznej planimetrii, odgrywających znacznie większą rolę – na przykład twierdzenie Pitagorasa czy twierdzenie Talesa.

4. Użycie w nazwie słowa „najmocniejsze" („najważniejsze", „zasadnicze") jest bardzo niedobrym pomysłem. Bo tu obok informacji wchodzi w grę *ocena*. A z tym należy bardzo uważać... Istnieją co prawda w matematyce tego rodzaju nazwy twierdzeń, ale są one bardzo rzadkie i w nich stosowanie takich słów jest uzasadnione – bądź historycznie, jak w przypadku zasadniczego twierdzenia algebry, bądź merytorycznie, jak w przypadku podstawowego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego.

Znajomy matematyk opowiedział mi, że to on jest mimowolnym sprawcą używania nowej nazwy. Otóż kilkanaście lat temu wygłaszał dla „młodzieży olimpijskiej" wykład, podczas którego omawiał różne zadania geometryczne. Kilkakrotnie wykorzystywał twierdzenie o odcinkach stycznych i w pewnym momencie powiedział „tyle razy dziś korzystaliśmy z tego twierdzenia, że moglibyśmy je nazwać najważniejszym twierdzeniem geometrii". A młodzież podchwyciła i rozpowszechniła – i w ten sposób dowcip zmienił się w rzeczywistość.

Na szczęście, nie zawsze dowcipy się urealniają. W 150 numerze *Delty* czytamy:

> Niektórzy nazywają twierdzenie o trzech ciągach (jeśli $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$, to ciąg (c_n) jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$) twierdzeniem o milicjantach i formułują je tak: jeśli znajdziesz się między dwoma milicjantami idącymi do tego samego komisariatu, to też tam trafisz.

Do dziś się zastanawiam, jak cenzura to puściła (numer ukazał się w czerwcu 1986 roku). Tu nowa nazwa się nie przyjęła[7].

Próby zmian od dawna funkcjonujących w polskiej terminologii matematycznej nazw są niestety częstsze. Parę lat temu z ogromnym zdziwieniem spotkałem się z określeniem „baza indukcyjna"[8] na pierwszy krok indukcyjny, stosowanym głównie w kręgach informatyków. I ta „nowomowa" budzi

[7] Jak się okazuje, analogiczna nazwa istnieje (i nawet jest używana) w języku włoskim – *teorema dei due carabinieri*. Nie wiem, czy te nazwy powstały niezależnie od siebie i nie wiem, która jest wcześniejsza.

[8] Jest to kalka z angielskiego określenia. Ale nawet patrząc na to z tej strony, nie jest to trafne, bo po angielsku też często używa się wyłącznie zapisu „(1), (2)" lub podobnego, a jeśli już

mój zdecydowany sprzeciw. Giuseppe Peano, który włączył zasadę indukcji do aksjomatyki liczb naturalnych, formułował po prostu koniunkcję warunków (zob. [13]). W Polsce, odkąd zaczęto mówić i pisać o indukcji, czyli od ponad stu lat, bada się po prostu dwa warunki – pierwszy i drugi (różnie zapisywane, czasem w formie „(1), (2)", czasem jako „(i), (ii)", czasem w formie „1°, 2°"). Terminów „pierwszy i drugi krok indukcyjny (indukcji)" zaczęto używać pół wieku temu. Przejrzałem podręczniki pisane przez znakomitych polskich matematyków – wszyscy formułują dwa numerowane warunki. W szczególności Wacław Sierpiński, w artykule o indukcji [16] opublikowanym w czasopiśmie poświęconym nauczaniu matematyki, stosuje zapis „1°, 2°", a Witold Wilkosz, w książce omawiającej systemy aksjomatyczne liczb całkowitych, używa zapisu „I, II"[9]. Jakie może być uzasadnienie dla tak istotnej zmiany? Poza tym typowe użycie słowa „baza" w matematyce jest inne – jest to rodzina obiektów, która niejako „generuje" całość. Rozważamy bazy topologii, bazy przestrzeni wektorowej, mamy liczne bazy powiązane z nazwiskami – *baza Schaudera*, *baza Hamela*, *baza Gröbnera*... Nazwanie pierwszego kroku indukcyjnego „bazą" jest w zupełnie innym stylu. Ewentualnie można znaleźć inną analogię – skoro pierwszy krok indukcyjny ktoś chce nazwać „bazą indukcyjną", to drugi powinien przechrzcić na „nadbudowę indukcyjną". Obym nie był (złym) prorokiem...

Bibliografia

[1] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric inequalities*, Wolters-Nordhoff Publishing, Groningen 1969.
[2] M. Bryński, *Olimpiady matematyczne. Tom 7*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1995.
[3] A. Engel, *Problem-solving strategies*, Springer, New York 1997.
[4] L. Euler, *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 11 (1767), 103–123.
[5] S. Gueron, *Substitutions, inequalities and history*, Crux Mathematicorum 28 (2002), nr 2, 88–90.
[6] M. S. Klamkin, *Duality in triangle inequalities*, Notices Amer. Math. Soc 18 (1971), nr 5, 782.
[7] M. S. Klamkin, *On a "problem of the month"*, Crux Mathematicorum 28 (2002), nr 2, 86–87.

w nazwie pierwszego kroku pojawia się słowo związane z bazą, to zazwyczaj w formie *base step* lub *base clause*.

[9] Wilkosz w dowodach podaje jeszcze jeden punkt: *III. Indukcja kończy dowód.* O takim komentarzu nieraz się obecnie zapomina, a jest on bardzo ważny – po sprawdzeniu dwóch warunków należy się powołać na twierdzenie, z którego teraz wynika teza!

[8] L. Kourliandtchik, *Powrót do krainy nierówności*, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2004.
[9] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, V. Volenec, *Recent advances in geometric inequalities*, Kluwer, Dordrecht 1989.
[10] M. Niedźwiedź, *Zbiór zadań z kółka matematycznego. Część II*, Wydawnictwo Szkolne Omega, Kraków 2012.
[11] A. Padoa, *Una questione di minimo*, Periodico di matematiche (ser. 4) 5 (1925), 80–85.
[12] H. Pawłowski, *Kółko matematyczne dla olimpijczyków*, Turpress, Toruń 1994.
[13] G. Peano, *Arithmetices principia. Nova methodo exposita*, Fratres Bocca, Torino 1889.
[14] *Piętnasta Olimpiada Matematyczna* (*1963–1964*). *Sprawozdanie Komitetu Głównego* (opr. S. Straszewicz), Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1965.
[15] W. W. Prasołow, *Zadaczi po płanimetrii, czast' II*, Nauka, Moskwa 1986.
[16] W. Sierpiński, *O indukcji matematycznej*, Parametr 2 (1931/32), nr 8–10, 233–244.
[17] S. Straszewicz, *Zadania z Olimpiad Matematycznych. Tom III*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1967.
[18] B. D. Suceavă, *A geometric interpretation of curvature inequalities on hypersurfaces via Ravi substitutions in the Euclidean plane*, Math. Intelligencer 40 (2018), nr 2, 50–54.
[19] W. Wilkosz, *Arytmetyka liczb całkowitych. System aksjomatyczny*, Nakładem Kółka Matematyczno-Fizycznego U.U.J., Kraków 1932.
[20] *XXXV Olimpiada matematyczna. Sprawozdanie Komitetu Głównego* (opr. M. Bryński i J. Norwa), Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1986.

Krzysztof Ciesielski
Uniwersytet Jagielloński
Instytut Matematyki
Krzysztof.Ciesielski@im.uj.edu.pl

Pan de Condorcet zbliżył się i podniósł do oczu szklankę wody, z której wróżbita odczytał złowrogą przepowiednię, dokładnie badając migocącą tajemniczą zawartość.

Jego inteligentny, lecz zimny wzrok badacza szukał w podwójnym, stałym i ciekłym, kryształe odpowiedzi na pytanie, które chłodny umysł sprowadzał do czysto fizykalnych dociekań.

Istotnie, uczony obliczał głębię, załamania światła i grę mikroskopijnych drobin wody. On, który pragnął odnaleźć we wszystkim przyczynę, odgadnąć chciał powód szarlatanerii, jaką na tak wybitnych ludziach, zebranych wokół tego stołu, uprawiał człowiek, któremu trudno było odmówić niezwykłego wpływu.

Widać nie znalazł rozwiązania problemu, bo odstawił szklankę na stół i pośród zdumienia, jakie wywołało proroctwo Cagliostra, powiedział:

– A więc i ja poproszę naszego znakomitego proroka, aby zapytał magiczne zwierciadło.

[...]

– A więc, markizie – powiedział głucho Cagliostro, opuszczając powieki – umrzesz od trucizny, którą nosisz w pierścieniu. Umrzesz…

– A gdybym ją wyrzucił? – przerwał Condorcet;

[...]

– O tak, markizie – zawołała pani du Barry – na Boga, wyrzuć tę obrzydłą truciznę! Wyrzuć ją po to choćby, aby zadać kłam temu nieznośnemu prorokowi, który dręczy nas swymi przepowiedniami. Jeśli ją wyrzucisz, na pewno się nie otrujesz. A ponieważ pan Cagliostro twierdzi, że od niej właśnie masz zginąć, pan Cagliostro rad nierad skłamie.

[...]

– To na nic – odparł spokojnie Cagliostro. – Pan de Condorcet jej nie wyrzuci.

– Istotnie – odparł markiz – nie wyrzucę jej nie dlatego, że chcę dopomóc przeznaczeniu, ale dlatego, że panu Cabanisowi przypadkiem udało się wykrystalizować dla mnie tę niezwykłą truciznę, a szczęśliwy traf może się nigdy nie powtórzyć. Dlatego jej nie wyrzucę. Triumfuj więc, panie Cagliostro.

– Przeznaczenie zawsze znajduje swoich wiernych wykonawców – odparł zagadnięty.

– Zatem umrę otruty – rzekł markiz. – Niech i tak będzie. Nie każdemu się to udaje. Przepowiedział mi pan wspaniałą śmierć. Szczypta trucizny na koniec języka i jestem unicestwiony. To już nie śmierć, to minus życie, jak mówimy w algebrze.

Alexandre Dumas, *Naszyjnik królowej*, przełożyła Wanda Błońska

Wiad. Mat. 56 (1) 2020, 143–149
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Krótkie informacje

Prezydent RP wręczył w dniu 4 marca 2020 roku Sławomirowi Ramsowi z Uniwersytetu Jagiellońskiego nominację na tytuł naukowy profesora nauk ścisłych i przyrodniczych.

* * *

Jerzy Kaczorowski z UAM został wybrany na przewodniczącego Komitetu Matematyki PAN na kadencję 2020–2023.

* * *

Nagrodę Abela za 2020 rok otrzymali Hillel Furstenberg z Hebrew University of Jerusalem i Gregory Margulis z Yale University za prekursorskie zastosowanie metod z probabilistyki i układów dynamicznych w teorii grup, teorii liczb i kombinatoryce.

* * *

Nagrodę Bergmana za 2019 rok otrzymali:

- Franc Forstnerič z University of Ljubljana w Słowenii, za wieloraki wkład do teorii funkcji wielu zmiennych zespolonych, geometrii zespolonej i analizy geometrycznej,
- Mei-Chi Shaw z University of Notre Dame w USA, za jej liczny wkład do teorii funkcji wielu zmiennych zespolonych, równań różniczkowych cząstkowych i geometrii Cauchy'ego–Riemanna.

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

* * *

Alexander Beilinson z University of Chicago i David Kazhdan z Hebrew University of Jerusalem zostali uhonorowani w 2020 roku Nagrodą Shawa za ogromny wpływ i głęboki wkład w rozwój teorii reprezentacji oraz wielu innych dziedzin matematyki.

* * *

Nagrodę Wolfa za 2020 rok otrzymali Simon K. Donaldson z Imperial College London i Yakov Eliashberg ze Stanford University za ich wkład do geometrii różniczkowej i topologii.

* * *

Nagrody Główne PTM za 2019 rok otrzymali:

- Yuriy Tomilov z IM PAN – Nagrodę im. Stefana Banacha za głębokie i szeroko cytowane wyniki w zakresie teorii operatorów i półgrup operatorów na przestrzeniach Banacha oraz ich zastosowania w teorii równań różniczkowych i teorii ergodycznej,
- Adam Bobrowski z PL – Nagrodę im. Hugona Steinhausa za całokształt dorobku w dziedzinie zastosowań matematyki.

* * *

Nagrody PTM dla Młodych Matematyków za 2019 rok otrzymali:

- Dominik Burek z UJ za cykl czterech artykułów z tematyki rozmaitości Calabiego–Yau,
- Agnieszka Hejna z UWr za cykl pięciu prac z analizy harmonicznej.

* * *

Feliks Przytycki z IM PAN został w 2020 roku laureatem Medalu im. Wacława Sierpińskiego. Z uwagi na sytuację epidemiczną tradycyjnie odbywający się wiosną wykład laureata został przesunięty na inny termin.

* * *

Laureatem Nagrody im. Kazimierza Kuratowskiego dla młodych matematyków za 2020 rok, przyznawanej przez IM PAN i PTM, został Mateusz Wasilewski z Katholieke Universiteit Leuven za cykl prac dotyczących własności aproksymacyjnych algebr operatorowych.

* * *

Laureatem Nagrody IM PAN za wybitne osiągnięcia naukowe w zakresie matematyki w 2020 roku został Damian Osajda z UWr i IM PAN za rezultaty w geometrycznej teorii grup.

* * *

Tadeusz Januszkiewicz z IM PAN otrzymał w 2019 roku Nagrodę Prezesa Polskiej Akademii Nauk za wyjątkowe rezultaty naukowe, w szczególności za pracę, w której zastosowanie zaawansowanych metod geometrii algebraicznej pozwoliło na uzyskanie nowych informacji dotyczących klasycznych zagadnień topologii, teorii aproksymacji i teorii interpolacji.

* * *

Laureatem medalu im. Juliusza P. Schaudera w 2020 roku została Susanna Terracini z Uniwersytetu w Turynie, w uznaniu jej wyjątkowego wkładu w rozwój teorii i zastosowań nieliniowych równań różniczkowych.

* * *

Adam Gregosiewicz z PL i Piotr Knosalla z UO zostali laureatami nagrody w Konkursie o Nagrodę im. Urszuli Ledzewicz, organizowanym przez Politechnikę Łódzką, za prace doktorskie z dziedziny zastosowań matematyki.

* * *

Camille Horbez z CNRS Orsay został w 2020 roku laureatem nagrody im. Kamila Duszenki za wybitne osiągnięcia matematyczne. Jury doceniło jego wkład w badanie brzegów pewnych przestrzeni hiperbolicznych, na których działa grupa $\mathrm{Out}(F_n)$ i ich zastosowań związanych ze sztywnością i brzegową średniowalnością.

* * *

Nagrodę im. Włodzimierza Mlaka i Zdzisława Opiala w 2020 roku otrzymał Yuriy Tomilov z IM PAN.

* * *

Stypendia Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego dla wybitnych młodych naukowców ustanowione w 2020 roku otrzymali matematycy: Piotr Tytus Achinger z IM PAN i Joanna Aleksandra Kułaga-Przymus z UMK.

* * *

Stypendia Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego na rok akademicki 2019/2020 za znaczące osiągnięcia otrzymali studenci matematyki: Angelika Abramiuk z PWr, Anadi Agrawal z UWr, Damian Burczyk z UW, Kamil Dunst z UMK, Michał Górniak z UWr, Mateusz Kędziora z UW, Karolina Halina Kęsik z PŚ, Jakub Maciej Morawski z UW, Weronika Marta Nitka z PWr, Tomasz Serafin z PWr, Tomasz Weron z PWr, Alicja Winnicka z PŚ, Karolina Wojtyniak z UMK.

* * *

Wśród laureatów konkursu START Fundacji na rzecz Nauki Polskiej w 2020 roku znaleźli się: Tomasz Dębiec z UW, Joachim Jelisiejew z UW, Jakub Konieczny z UJ i Emilia Kozłowska z PŚ.

* * *

Stypendium im. Michała Jakuba Łyska w 2020 roku otrzymał Błażej Żmija z UJ, natomiast Stypendium im. Franciszka Leji otrzymał Tymoteusz Chmiel.

* * *

W Konkursie PTM im. Józefa Marcinkiewicza na najlepszą studencką pracę z matematyki teoretycznej organizowanym przez Oddział Toruński PTM w 2019 roku nagrody otrzymali:

- drugie nagrody – Łukasz Bożyk z UW za pracę *Inducibility of graphs*, Maciej Kucharski z UWr za pracę *Dimension-free estimates for Riesz transforms related to the harmonic oscillator* i Wojciech Słomian z PWr za pracę *Transferencja oszacowań L_p pomiędzy zsymetryzowanymi rozwinięciami Jacobiego a transformatą Dunkla*,
- trzecią nagrodę – Kamil Urbaś z UJ za pracę *Pewne warianty przestrzeni Gromowa–Hausdorffa*,
- wyróżnienie – Wojciech Duliński z UJ za pracę *Funkcje Morse'a i funktory strukturalne w topologii różniczkowej*.

W 2019 roku fundatorem nagród było Towarzystwo Upowszechniania Wiedzy i Nauk Matematycznych.

* * *

W Konkursie PTM na najlepszą pracę studencką z teorii prawdopodobieństwa i zastosowań matematyki organizowanym przez Oddział Wrocławski PTM w 2019 roku nagrody otrzymali:

- pierwszą nagrodę – Jakub Skrzeczkowski z UW za pracę *Differentiability of solutions to perturbed structured population models with respect to perturbation parameter*,
- drugie nagrody – Agnieszka Zięba z PW za pracę *Prawie algebraizacja (kwadratowych) harnessów* i Krzysztof Kępczyński z UWr za pracę *Asymptotics of supremum distribution of two-dimensional Gaussian processes*,
- trzecią nagrodę – Maciej Miśta z PWr za pracę *Czasy trafienia w zbiory dla procesów Lévy'ego na prostej*,
- wyróżnienia – Jakub Madej z PŁ za pracę *Ubezpieczenia grupowe dla zależnych czasów życia* i Mateusz Śliwiński z PWr za pracę licencjacką *Dyskretne półgrupy Feynmana–Kaca*.

* * *

W Konkursie PTM im. Anny Zofii Krygowskiej na najlepszą pracę studencką z dydaktyki matematyki napisaną w 2019 roku nagrody otrzymali:

- I nagrodę – Agnieszka Polak z UP w Krakowie za pracę *„Myśląca klasa" Petera Liljedahla jako sposób realizacji wybranych zagadnień dotyczących ciągów*,
- II nagrodę – Katarzyna Szczepaniak z UP w Krakowie za pracę *Wybrane tematy z trygonometrii w myślącej klasie*,
- III nagrodę – Amanda Weronika Lewandowska z UAM za pracę *Matura rozszerzona z matematyki – analiza jakościowa wybranych rozwiązań zadań*,
- wyróżnienie – Piotr Bury z UJ za pracę *Najważniejsze własności liczb e oraz π. Od definicji do przestępności*.

* * *

Michał Karoński z UAM został członkiem sześcioosobowego Identification Committee European Research Council. Komitet ma za zadanie przedstawić kandydatów do nowej Rady Naukowej ERC.

* * *

Uniwersyteckie Centrum Badań Nieliniowych im. J. P. Schaudera przy UMK ogłosiło konkurs o Nagrodę im. J. P. Schaudera dla młodych matematyków za najlepszą pracę naukową z dziedziny analizy nieliniowej. Ten nowy konkurs ma na celu promocję osiągnięć polskiej nauki w obszarze analizy nieliniowej i wspieranie młodych badaczy w tej dziedzinie. Regulamin konkursu i szczegóły związane z procedurą konkursową można znaleźć na stronie Centrum: https://cbn.umk.pl. Plakat informujący o konkursie zamieszczamy na stronie 160.

* * *

W dniu 26 lutego 2020 roku w Bułgarskim Instytucie Kultury w Warszawie odbył się koncert muzyki klasycznej w wykonaniu Pera Enflo (fortepian) oraz Ralicy Petkovej (skrzypce). Per Enflo jest szwedzkim pianistą, a jednocześnie słynnym matematykiem, znanym m.in. z tego, że rozwiązał w 1972 roku problem nr 153 z *Księgi Szkockiej*, za co otrzymał od Stanisława Mazura w nagrodę żywą gęś.

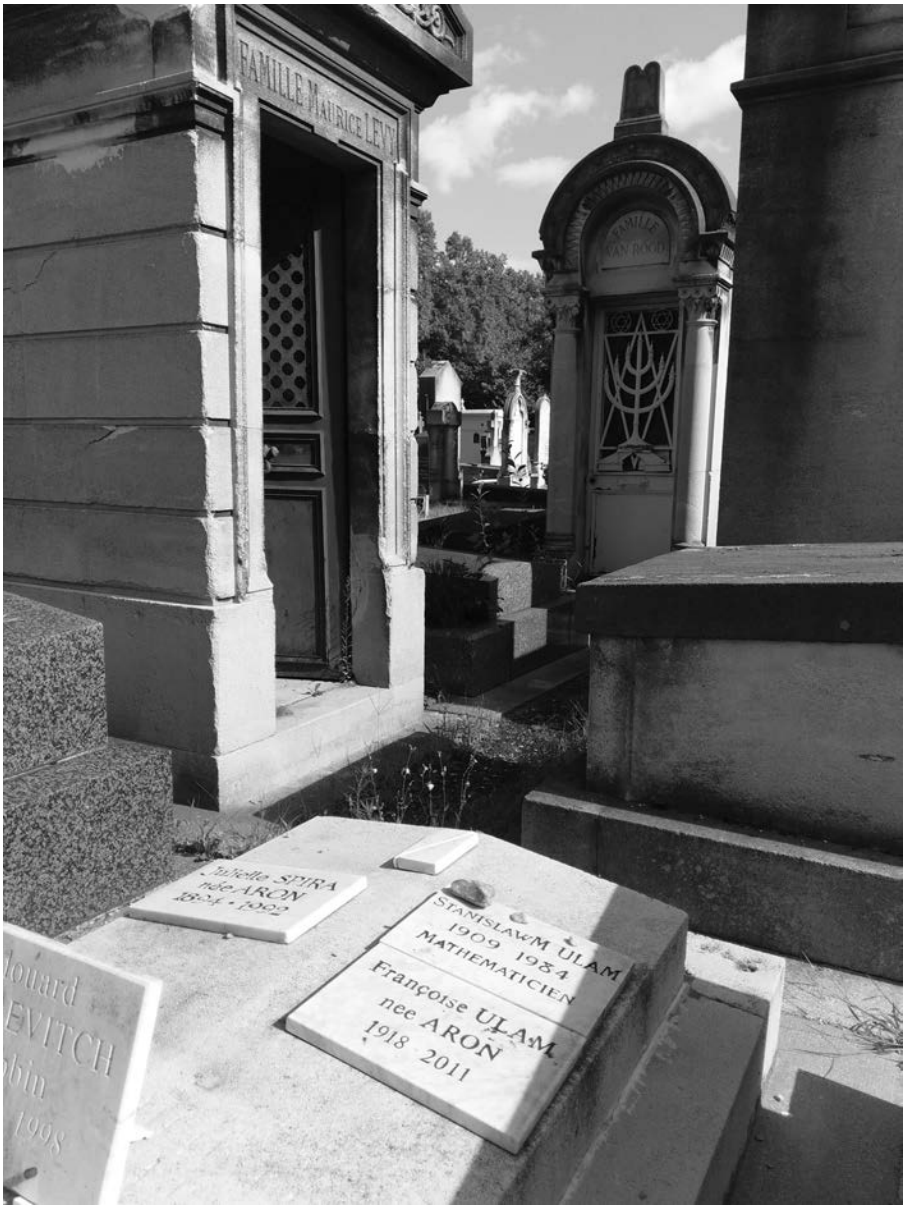
* * *

W dniu 11 kwietnia 2020 roku zmarł w wieku 82 lat John Horton Conway, angielski matematyk mający w swoim dorobku istotny wkład m.in. do teorii grup skończonych (autor *Atlasu grup skończonych*), teorii węzłów, logiki matematycznej, teorii gier, twórca *Gry w życie*.

W dniu 4 kwietnia 2020 roku zmarł w wieku 94 lat Włodzimierz Stankiewicz, specjalista w zakresie nomografii, autor wielu podręczników akademickich.

W dniu 8 lipca 2020 roku zmarł w wieku 80 lat Diethard Pallaschke, profesor *Karlsruher Institut für Technologie* w Bonn, wybitny specjalista w zakresie teorii optymalizacji i analizy wypukłej, członek honorowy PTM.

Redakcja prosi o nadsyłanie informacji do działu *Krótkich informacji* na adres: Grzegorz Łysik, Instytut Matematyki UJK, ul. Świętokrzyska 15, 25-406 Kielce, e-mail: glysik@ujk.edu.pl.



Grób Stanisława Ulama na cmentarzu Montparnasse w Paryżu (fot. Tomasz Bochnak)

Wiad. Mat. 56 (1) 2020, 151–154
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Leon Mikołajczyk (1929–2016)





Leon Mikołajczyk urodził się 29 stycznia 1929 roku w Topoli Szlacheckiej koło Łęczycy, w rodzinie chłopskiej. Rodzice prowadzili gospodarstwo średniej wielkości. Mieli trzy córki i dwóch synów – Leon był najmłodszy. Rodzice i siostry mieli wykształcenie elementarne. Leon i jego brat Henryk byli pierwszymi osobami w rodzinie, które zdobyły wyższe wykształcenie, a później nawet uzyskali tytuły profesorów. Do 1939 roku Leon ukończył w Topoli kilka klas i jak sam wspominał, „nauczyciele starali się wprowadzać go w świat książek".

W czasie wojny cała rodzina Mikołajczyków została podzielona i przesiedlona do Generalnej Guberni. Leon pracował – był robotnikiem rolnym i leśnym. Pomagał rodzicom w zdobywaniu słoniny, mleka, leków itp. dla chorego brata, który miał początki gruźlicy. Wielkim szczęściem w tych czasach było dla niego, gdy udało mu się zdobyć i przeczytać jakąś książkę. Wszystko to mocno wpłynęło na jego dalsze życie.

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Po zakończeniu wojny rodzina Mikołajczyków wróciła na swoje stare gospodarstwo, a Leon od stycznia 1945 roku kontynuował naukę w Łęczycy aż do matury w 1949 roku. W tym czasie ukończył szkołę podstawową, gimnazjum i liceum. W ciągu jednego roku często przerabiał po dwie klasy. Nauczyciele, których spotkał, byli wspaniałymi pedagogami i oddanymi wychowawcami. Leon dużo im zawdzięczał. Sam chciał zostać nauczycielem. Wybór kierunku studiów wynikał właśnie z tego pragnienia i rady nauczyciela matematyki Ludwika Wencla. W 1949 roku Leon złożył egzamin wstępny na trzyletnie studia matematyczne na Uniwersytecie Łódzkim. W czasie tych studiów zachęcony przez swoją nauczycielkę Jadwigę Grodzką podjął pracę nauczyciela matematyki w swojej dawnej szkole w Łęczycy. Mimo dodatkowej pracy, studia w Łodzi ukończył zgodnie z planem w 1952 roku jako jeden z wyróżniających się studentów i spełniło się jego wielkie marzenie – został skierowany na Uniwersytet Warszawski na dwuletnie studia magisterskie (opiekunem był Roman Leitner). Leon twierdził, że miał szczęście spotkać wielu wspaniałych nauczycieli, m.in. Romana Sikorskiego, Wacława Sierpińskiego, Stanisława Mazura, Karola Borsuka, Kazimierza Kuratowskiego i Andrzeja Mostowskiego. We wrześniu 1954 roku Mikołajczyk został zatrudniony w Katedrze Matematyki UŁ. Równolegle kilku studentów IV roku UŁ (wśród nich Zbigniew Jakubowski) zostało zatrudnionych na Politechnice Łódzkiej. Wsparcie otrzymane od kolegów z UŁ dla „grupy politechnicznej" zaowocowało przyjaźniami na kilkadziesiąt lat (stąd wieloletnia przyjaźń między Mikołajczykiem i Jakubowskim).

W październiku 1954 roku z inicjatywy Grupy Funkcji Analitycznych PAN (przewodniczył jej Franciszek Leja, członkami byli m.in. Zygmunt Charzyński i Mieczysław Biernacki) odbyła się w Łodzi Konferencja Funkcji Analitycznych. Organizatorem był prezes Oddziału Łódzkiego PTM Witold Janowski, a w zespole organizacyjnym znaleźli się m.in. Leon Mikołajczyk, Zbigniew Jakubowski i Paweł Wiatrowski. Konferencja ta zapoczątkowała cykl międzynarodowych konferencji z analizy zespolonej organizowanych co cztery lata przez następne pokolenia matematyków z Krakowa, Lublina, Łodzi, a później także z innych miast. Jednymi z bardziej aktywnych uczestników i współorganizatorów byli Leon Mikołajczyk i jego uczniowie. W tym czasie był on zatrudniony w katedrze Janowskiego i z jego inicjatywy zajmował się geometryczną teorią funkcji analitycznych.

Doktorat nauk matematycznych Mikołajczyk uzyskał w 1963 roku na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii UŁ. Promotorem był Witold Janowski. Praca doktorska składała się z dwóch części. Głównym wynikiem było wyznaczenie obszaru zmienności układu współczynników (A_2, A_3) pewnej klasy funkcji holomorficznych, unormowanych, jednolistnych, ograniczonych z góry i syme-

trycznych w kole jednostkowym. W drugiej części pracy rozważana była klasa $\Sigma_p(m)$, przy czym $p = 1, 2, \ldots$ oraz $m \in (0,1)$, funkcji w_p holomorficznych, jednolistnych, p-symetrycznych, spełniających warunek $|w_p(z)| > m$ dla $|z| > 1$ i z biegunem jednokrotnym w $z = \infty$. Autor otrzymał twierdzenie o oszacowaniu z góry i z dołu $|w_p'(z)|$ w przypadku, gdy moduł $|w_p(z)|$ jest stały. Sześć lat później, w rozprawie habilitacyjnej – podobnie jak w drugiej części pracy doktorskiej – stosował metodę Robinsona do funkcji p-symetrycznych i uzyskał nowe, ciekawe rezultaty. Badania wspomnianych klas były kontynuowane i zaowocowały cyklem prac, które były inspiracją dla matematyków zajmujących się geometryczną teorią funkcji holomorficznych.

Latem 1970 roku matematycy UŁ dostali do użytku nowy gmach przy ulicy Banacha 38 – powstał Instytut Matematyki z podziałem na zakłady. Dyrektorem Instytutu został inicjator wybudowania gmachu Witold Janowski (seniorem budowy był Jerzy Jaroń), a jego zastępcami Ryszard Jajte i Leon Mikołajczyk, który odpowiadał za część dydaktyczną, programową, wychowawczą i bibliotekę. Po 14 grudnia 1972 roku, po nagłej śmierci Janowskiego, Leon został kierownikiem jego zakładu. W latach 1978–1990 był dyrektorem Instytutu, a w okresie 1981–1983 prodziekanem Wydziału MFCh UŁ. W latach 1979–1993 pracował także na Politechnice Łódzkiej (współautorka tego wspomnienia była jego studentką). Wszystkie te obowiązki pełnił z dużym oddaniem, cieszył się uznaniem współpracowników i studentów.

Leon Mikołajczyk był miłośnikiem książek. Miał szczęście (jak twierdził), trafić na polski przekład (autorstwa Franciszka Skibińskiego) monografii *Matematyczna teoria procesów optymalnych* z 1969 roku, której współautorem był Lew Pontriagin oraz na wydaną rok później książkę *Lekcji po matematičeskoj teorii ekstremalnych zadač* Igora Girsanova. Te dwie książki stały się źródłem nowej tematyki badawczej Leona oraz jego współpracowników. Po pewnym czasie w badania te włączył się Władysław Pełczewski, jeden z twórców Wydziału Elektrycznego PŁ. To był początek teorii sterowania w Instytucie Matematyki UŁ. Oczywiście później ukazały się artykuły z tej tematyki i dorobek naukowy Leona znacznie się powiększył. Szczególną satysfakcję sprawiła mu wspólna praca z fizykiem Tomaszem Domańskim, dotycząca toksykologii. Praca ta (jako pierwszy dodatek) znalazła się w książce Jerzego Piotrowskiego *The application of metabolic and excretion kinetics to problems of industrial toxicology*, wydanej przez w 1971 roku przez Departament Zdrowia, Edukacji i Opieki Społecznej Stanów Zjednoczonych.

W 1988 roku Leon otrzymał tytuł profesora nadzwyczajnego. Był promotorem dwunastu prac doktorskich (dwóch z jego uczniów, Marcin Studniarski i Dariusz Zagrodny, ma obecnie tytuł profesora). Znaczna część pisanych pod

jego kierunkiem prac magisterskich i rozpraw doktorskich dotyczy teorii i metod optymalizacji oraz teorii sterowania, co wymagało od promotora znacznej wiedzy z informatyki.

Jednym z najważniejszych osiągnięć organizacyjnych Leona Mikołajczyka było przewodniczenie Komitetowi Organizacyjnemu XII Zjazdu Matematyków Polskich w Łodzi w dniach 12–14 września 1979 roku. Przyjechało kilkuset uczestników (w tym jedenaście osób z zagranicy), którym trzeba było zapewnić wyżywienie, zakwaterowanie, a sytuacja kraju była trudna. Ze sprawnym komitetem organizacyjnym i dzięki pomocy prezydenta Łodzi Józefa Niewiadomskiego Zjazd udał się. Jednym z zaproszonych gości był Marian Rejewski. W czasie Zjazdu otrzymał on Srebrny Medal „Za zasługi dla obronności kraju", przyznany mu przez Ministra Obrony Narodowej na wniosek PTM.

Leon był aktywnym członkiem PTM (od 1955 roku) oraz Łódzkiego Towarzystwa Naukowego (od 1989 roku). Przeszedł na emeryturę w 1999 roku, ale przestał pracować na UŁ dopiero cztery lata później. W dniu 27 listopada 2013 roku odbyła się uroczystość odnowienia jego doktoratu na UŁ. Opinię o jubilacie opracował Marcin Studniarski. Decyzję podjął Senat UŁ. Leon był wielokrotnie nagradzany. Wśród odznaczeń i medali, które mu przyznano, szczególnie cenił Medal Komisji Edukacji Narodowej.

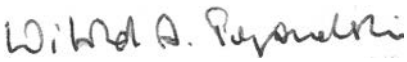
Niestety, po wielu problemach zdrowotnych, 3 marca 2016 roku Leon Mikołajczyk zmarł. Został pochowany na cmentarzu rzymskokatolickim na Dołach w Łodzi. Uroczystości pogrzebowe na jego prośbę odbyły się w gronie najbliższej rodziny.

Zbigniew Jerzy Jakubowski (Łódź), *Małgorzata Terepeta* (Łódź)

Wiad. Mat. 56 (1) 2020, 155–159
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Witold Adam Pogorzelski (1927–2018)





Witold Adam Pogorzelski urodził się 14 marca 1927 roku w Łodzi. Niewiele mówił o swoim pochodzeniu, czasami wspominał o ziemiańskiej rodzinie na Litwie, która zbankrutowała na długo przed wojną. Nie był spokrewniony ze znanym matematykiem Witoldem Pogorzelskim, żyjącym w latach 1895–1963. Szkołę powszechną, Szkołę Zgromadzenia Kupców w Łodzi, ukończył w 1939 roku. We wrześniu 1939 roku stracił ojca, Adama Pogorzelskiego, a w grudniu tego samego roku został, razem z mamą, Anielą Pogorzelską (z domu Katwajtis), i starszą siostrą Eweliną, wysiedlony z Łodzi. Zamieszkał w Warszawie, na Żoliborzu. Uczęszczał do tajnego liceum matematyczno-fizycznego im. Księcia Józefa Poniatowskiego. Egzaminy maturalne zdał w 1944 roku. Równolegle ukończył szkołę wojskową i wstąpił do Armii Krajowej. Brał udział w powstaniu warszawskim – we wrześniu 1944 roku dostał się do niewoli i cudem uniknął śmierci w Pruszkowie. Umieszczono go w obozie koncentracyjnym w Sachsenhausen-Oranienburgu. Pamiętał głód i zimno, bo zima 1944/45 była sroga. Spali

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

w barakach, gęsto zastawionymi pryczami, bez okien. Jak wspominał, wiatr hulał po sali, ale gdyby nie ten wiatr, to udusiliby się we własnym smrodzie. To, co mu najbardziej utkwiło w pamięci, to apele poranne, zaczynające się około czwartej rano i trwające długo. Liczono więźniów i liczba musiała się zgadzać co do jednego. Wielu więźniów umierało podczas apeli, co powodowało zamieszanie i niekiedy zaczynano liczenie od nowa. Zbliżający się front wschodni skłonił władze obozu do ewakuacji. Koło miejscowości Wittstock konwój uległ samorozwiązaniu. Po paru dniach błąkania się Pogorzelski napotkał oddziały amerykańskie. Zapewne dlatego, przez całe dalsze życie Pogorzelski uważał Stany Zjednoczone za najlepsze państwo na świecie, ostoję wolności i demokracji. Twierdził, że w wojsku amerykańskim służyli wtedy głównie Polacy – nie miał problemów z porozumiewaniem się, gdyż w każdym czołgu był ktoś mówiący po polsku. Szybko wrócił do Warszawy – decyzję powrotu tłumaczył niepokojem o mamę i siostrę. Już w listopadzie 1945 roku rozpoczął na politechnice studia, które po roku przerwał i przeniósł się do Wrocławia, gdzie w 1952 roku ukończył Politechnikę, uzyskując tytuł magistra nauk technicznych. Jeszcze jako student, w 1949 roku, podjął pracę w Katedrze Pomiarów Maszyn Cieplnych. Od 1953 roku uczestniczył w seminarium logicznym prowadzonym przez Marię Kokoszyńską-Lutmanową i Jerzego Słupeckiego. W 1955 roku przeniósł się na Wydział Filozoficzno-Historyczny UW i całkowicie poświęcił logice formalnej. W 1957 roku podjął pracę na połowie etatu w Zakładzie Logiki PAN, którym kierował Kazimierz Ajdukiewicz. W dniu 21 września 1960 roku obronił pracę doktorską *Teorie systemów dedukcyjnych adekwatne względem rachunków zdaniowych*, której promotorem była Kokoszyńska-Lutmanowa. Tytuł docenta uzyskał 7 października 1964 roku na podstawie rozprawy *Twierdzenia o dedukcji w logikach zdaniowych*.

Z tego okresu pochodzą publikacje, które uczyniły go znanym – praca [1] zawiera schematy twierdzeń o dedukcji, praca [2] omawia najsłabszy system, dla którego zachodzi klasyczne twierdzenie o dedukcji. Najważniejsze jednak było zdefiniowanie strukturalnej zupełności w artykule [3].

Pogorzelski nie określił wyraźnie swojego mistrza i mentora, choć najcieplej wspominał Marię Kokoszyńską-Lutmanową. Do końca życia zachował napisaną po polsku książkę (z dedykacją) Alfreda Tarskiego dotyczącą pojęcia prawdy – prace Tarskiego stale stanowiły dla niego inspirację, czerpał z nich wiele i często do nich wracał. Inną książką stale obecną w bibliotece Pogorzelskiego była *Logika matematyczna* Andrzeja Mostowskiego. W latach sześćdziesiątych blisko współpracował z Jerzym Słupeckim, który – pełniąc funkcję rektora WSP w Opolu – przyczynił się do powstania tam ośrodka badawczego, w którym zajmowano się algebrą i logiką. Wspierał starania Słupeckiego, prowadząc se-

minarium naukowe. Pełnił również funkcję zastępcy redaktora naczelnego (którym był Słupecki) czasopisma *Studia Logica*. Współpraca zaowocowała paroma publikacjami naukowymi oraz popularnonaukową pozycją [4].

Od 1 lutego 1969 roku Pogorzelski pracował w Instytucie Matematyki Uniwerystetu Śląskiego. Początkowo sprawował nadzór merytoryczny nad nauczaniem logiki w UŚ, nie trwało to jednak długo. Organizował seminarium z logiki formalnej, a dokładniej teorii systemów logicznych. Raz w miesiącu odbywały się wspólne spotkania z Katedrą Logiki UJ (na przemian w Katowicach i Krakowie) kierowaną przez Stanisława Surmę. Założone zostało czasopismo naukowe *Reports on Mathematical Logic*, wydawane przez UJ i UŚ, które szybko zyskało rangę międzynarodową, obecnie dość wysoką. Po odejściu Pogorzelskiego władze UŚ szybko zerwały współpracę z UJ. Okres katowicki (lata 1969–1984) był najważniejszym w życiu naukowym Pogorzelskiego. Wiele publikował, ale zajął się głównie pisaniem książek. Książki [5–7] były podręcznikami dla studentów. Książka [8] była (przynajmniej w zamierzeniu) próbą podsumowania rezultatów badań zespołu. Zasadniczą kwestią badawczą była zupełność systemu logicznego, a więc klasyczne zagadnienie z programu Hilberta, ale odnoszona do zbioru reguł inferencyjnych. Strukturalna zupełność była kluczowym pojęciem w aspekcie takich badań. Pogorzelski zebrał grono współpracowników, którzy podjęli temat. Wypromował sześciu doktorów (w tym autorów tego życiorysu). Tytuł profesora nadzwyczajnego nauk matematycznych uzyskał w 1974 roku.

Przez seminarium Zakładu Logiki Matematycznej UŚ w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku przewinęło się bardzo wiele osób. Początkowo najważniejszym uczestnikiem był Tadeusz Prucnal, pierwszy doktorant Pogorzelskiego. Obaj panowie uzupełniali się znakomicie i ich współpraca rozwijała się wspaniale, m.in. sformalizowali pojęcie reguły podstawiania za zmienne predykatowe.

Nagłe zerwanie tej współpracy i przeprowadzka Prucnala do Kielc była dla nas wszystkich bolesnym ciosem. Pogorzelski utrzymywał dobre stosunki z Klemensem Szaniawskim, Bogusławem Wolniewiczem, Romanem Suszką, Stanisławem Surmą. Roman Suszko przez kilka lat przyjeżdżał z referatami do Katowic. W obszarze logiki Pogorzelski miał też wiele wspólnego z Ryszardem Wójcickim. Jeżeli chodzi o logików-matematyków, to Andrzej Grzegorczyk, Andrzej Mostowski i Czesław Ryll-Nardzewski byli jego recenzentami profesorskimi i recenzje były wyśmienite. Bardzo się starał o utrzymywanie kontaktów z Andrzejem Mostowskim, którego bardzo wysoko cenił.

Pogorzelski stosował logikę i rozsądek, także na co dzień. Chyba jak nikt inny przeciwstawiał się nonsensom administracyjnym, podczas gdy inni nie reagowali. Zwalczał różne rozpowszechnione, lecz bezsensowne, sentencje jak na

przykład „wyjątek potwierdza regułę". Miał odwagę publicznie bronić logicznego i racjonalnego rozumowania, m.in. w czasie otwartej dyskusji uniwersyteckiej z pewnym marksistą, który twierdził, że pojawienie się sprzeczności w nauce jest pożądane. Miał do komunizmu (czy realnego socjalizmu) stosunek zdecydowanie negatywny i często otwarcie dawał temu wyraz. Mówił, że to, co oryginalne w filozofii marksistowskiej, nie jest ciekawe, a to co ciekawe – nie jest oryginalne. Najbardziej drażnił go postulat prymatu klasy robotniczej, czyli – jak rozumiał – prymatu głupoty i niewiedzy. Cenił ludzi mądrych i zdolnych, choć zauważał, że samo wykształcenie mądrości nie daje.

Uważał, jak większość logików, że opis naukowy świata wymaga doboru odpowiednich środków metodologicznych – dlatego można go uważać za neopozytywistę, choć sam się za niego nie uważał. Pogorzelski nie napisał w swoim życiu żadnej pracy filozoficznej i nie uważał się za filozofa, miał jednak sprecyzowane poglądy z zakresu filozofii i logiki, które wyraził dobitnie, choć w rozproszony sposób, w wielu swoich pracach. Głęboko wierzył w formalizm logiczny i sądził, że można odkryć rodzaj rachunków, specyficzną teorię dowodu, pozwalającą na naturalne wyprowadzenie wszystkich praw logiki klasycznej. Wierzył, że uczynił krok w tym kierunku i za swoje wielkie odkrycie uważał działanie reguły inferencyjnej na regułę (zob. [10]). Może przesadna wiara w formalizm, a może obawa, że nie zostanie właściwie odczytany, sprawiła, iż w swoich pracach nadużywał oznaczeń formalnych. Utrudnia to znacznie czytanie jego tekstów i odstręcza czytelników. Zupełnie inaczej odbierane były jego wypowiedzi ustne czy krótkie listy. Niezwykły refleks, biegłość w posługiwaniu się językiem i dostrzeganie w skomplikowanych sprawach najistotniejszych rzeczy sprawiały, że skutecznie umiał przekonywać do swoich racji.

W latach 1978–1982 był prodziekanem ds. studenckich i został tej funkcji pozbawiony, gdy zaprotestował przeciw decyzji rektora UŚ o skreśleniu z listy jednego ze studentów, zaangażowanego w działalność podziemną w okresie stanu wojennego. Sprawa ta, jak i negatywna ocena wystawiona przez władze partyjno-wojskowe, przyśpieszyła odejście Pogorzelskiego z UŚ, przeprowadzkę do Białegostoku i podjęcie pracy w Filii UW z dniem 1 lutego 1984 roku. Decyzji przenosin do Białegostoku nie żałował i dobrze się czuł w tamtejszym środowisku. Szybko zorganizował Zakład Logiki Matematycznej i seminarium naukowe. Był tam lubiany i doceniany; proszono go o kontynuowanie pracy aż do 2006 roku na etacie profesora zwyczajnego. Mimo podeszłego wieku kontynuował w Białymstoku badania naukowe i wiele publikował. Najważniejszy był *Elementarny słownik logiki formalnej* [11], wydany przez Filię UW w Białymstoku w 1992 roku (wersja angielska ukazała się w 1994 roku).

Pogorzelski dużo czytał i dużo książek kupował. Poza literaturą fachową interesował się zwierzętami, II wojną światową i kosmologią. Nie był jednak zainteresowany tworzeniem księgozbiorów. Nie licząc paru tytułów, wszystkie książki obowiązywała zasada dwóch lat: jeżeli do jakiejś książki nie zajrzał przez dwa lata, to wylatywała ona z księgozbioru – była sprzedawana lub darowana.

Kochał zwierzęta, zwłaszcza koty i z wielkim bólem przyjmował informacje o ich krzywdzie. Angażował się w akcje na rzecz zwierząt, finansując wiele celów i projektów. Pod koniec życia ciężko chorował; odchodził długo i boleśnie, stopniowo tracąc kontakt ze światem. Witold Adam Pogorzelski zmarł 14 czerwca 2018 roku w Białymstoku i pochowany został na cmentarzu w Karakulach. Na płycie nagrobnej ma utrwalone zdjęcie z kotem Maksiem, najukochańszym z ukochańszych.

Cytowane prace Witolda Adama Pogorzelskiego

[1] *The deduction theorem for Łukasiewicz many-valued propositional calculi*, Studia Logica 15 (1964), 7–19.
[2] *On the scope of the classical deduction theorem*, J. Symb. Log. 33 (1968), 77-81.
[3] *Structural completeness of the propositional calculus*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 19 (1971), 349–351.
[4] *O dowodzie matematycznym*, PZWS, Warszawa 1962 (współautor: J. Słupecki).
[5] *Klasyczny rachunek zadań*, PWN, Warszawa 1969.
[6] *Klasyczny rachunek kwantyfikatorów*, PWN, Warszawa 1981.
[7] *Wstęp do logiki matematycznej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1974 (współautor: T. Prucnal).
[8] *Elements of the theory of completeness in propositional logic*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1982 (współautor: P. Wojtylak).
[9] *Structural Completeness of the First-order Predicate Calculus*, Z. Math. Logik Grundlagen Math. 21 (1975), 315–320 (współautor: T. Prucnal).
[10] *On Hilbert's operation on logical rules*, Rep. Math. Logic 12 (1981), 35–50.
[11] *Elementarny słownik logiki formalnej*, Dział Wydawnictw Filii UW, Białystok 1992.

Piotr Wojtylak (Opole), *Wojciech Dzik* (Katowice)

UNIWERSYTET
MIKOŁAJA KOPERNIKA
W TORUNIU

cbn.umk.pl

Uniwersyteckie Centrum Badań Nieliniowych
im. Juliusza Pawła Schaudera

ogłasza



KONKURS

o NAGRODĘ im. J. P. Schaudera

DLA MŁODYCH MATEMATYKÓW

za najlepszą pracę naukową
w dziedzinie analizy nieliniowej

Termin zgłaszania kandydatów:
do 31 października 2020 r.

DLA ZWYCIĘZCY:

DYPLOM
PREMIA FINANSOWA
WYKŁAD PLENARNY W CZASIE UROCZYSTOŚCI WRĘCZENIA MEDALU SCHAUDERA

Szczegóły i regulamin konkursu
znajdują się na stronie: cbn.umk.pl

Wiad. Mat. 56 (1) 2020, 161–170
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Recenzje



Roman Duda, *Historia matematyki w Polsce na tle dziejów nauki i kultury*, Instytut Historii Nauki im. L. i A. Birkenmajerów Polskiej Akademii Nauk, Warszawa 2019, 625 str.

Nie ma raczej wątpliwości, że matematyka jest szczególnym (może nawet najważniejszym) tytułem do chwały nauki polskiej. Jak powiedział kiedyś (informacja od Zbigniewa Semadeniego) Benoît Mandelbrot, najważniejszą datą w historii matematyki XX wieku jest odzyskanie przez Polskę niepodległości. Wprawdzie to stwierdzenie dotyczy ostatnich stu lat, ale nie umniejsza wagi tego, co działo się wcześniej, nawet przy dodaniu oczywistej uwagi, że dawniejsza matematyka polska nie odnotowała tak spektakularnych osiągnięć, jak ta po 1918 roku. Tak czy inaczej, chciałoby się powiedzieć, że nareszcie mamy całościowe opracowanie dziejów matematyki polskiej. Licząca ponad 600 stron książka Romana Dudy jest podzielona na dwie części. Pierwsza (strony 25–401; wcześniej mamy wykaz stosowanych oznaczeń; rozdziały I–X) stanowi narrację (określenie autora), a druga (strony 403–625; rozdziały XI–XVI) obejmuje rozmaite dane personalne, bibliograficzne, dydaktyczne, organizacyjne i indeksy. Na uwagę zasługuje bardzo bogata dokumentacja bibliograficzna i źródłowa, w tym wspomnieniowa – w części narracyjnej znajduje się wiele zdjęć osób i reprodukcji okładek książek. Materiał zawarty w rozdziałach XI–XVI na pewno będzie nieodzowną pomocą dla dalszych badań porządkujących i bibliometrycznych nad historią matematyki polskiej. Każdy, kto będzie chciał kontynuować w przyszłości te tematy, znajdzie właściwy punkt wyjścia w zestawieniach sporządzonych w części drugiej recenzowanej książki. Jest ona też niewątpliwym sukcesem edytorskim z uwagi na estetyczny wygląd i staranną korektę. Dodam, że jest to niejako zwieńczenie długoletnich badań Romana Dudy nad historią matematyki w Polsce, których efektem stało się wiele publikacji, także za granicą.

Narracja jest zorganizowana wedle następujących rozdziałów: I. Polska w średniowieczu (wieki XI–XV), II. Polska u progu czasów nowożytnych (wieki XVI–XVIII), III. Polska rozbiorowa I (okres 1795–1865), IV. Polska rozbioro-

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

wa II (1865–1914), V. Polska między dwoma wojnami (1915–1940), VI. Matematyka polska lat międzywojennych, VII. Katastrofa II wojny światowej, VIII. Polska po II wojnie światowej, IX. Matematyka polska po II wojnie światowej, X. Próba podsumowania. Ta struktura jest w pewien sposób złamana. Pomijając ostatni (którego obecność jest oczywista), rozdziały I–IV są tak pomyślane, że z jednej strony, dostarczają informacji historycznej dotyczącej wydarzeń, by tak rzec, pozamatematycznych (politycznych, kulturowych itd.), z drugiej strony, referują stan matematyki, zarówno w Polsce, jak i poza nią. W dalszych rozdziałach, tj. V–IX, te sprawy są rozdzielone. Kwestie z zakresu historii ogólnej są omawiane w rozdziałach V, VII i VIII, natomiast dzieje matematyki w dwóch pozostałych, tj. VI i IX. Taka organizacja jest zrozumiała z uwagi na to, co stało się w matematyce polskiej po 1918 roku i wiąże się z zacytowaną opinią Mandelbrota.

Mam jednak drobne (lub nie, jeśli ktoś woli) uwagi dotyczące podziału na poszczególne okresy i nazewnictwa. Nie wydaje mi się, aby określenie „Polska u progu czasów nowożytnych (wieki XVI–XVIII)" było trafne. Panująca praktyka historyków jest taka, że, chociaż datowanie początku (progu) czasów nowożytnych jest rzeczą sporną (pomijam dyskusje na ten temat), to wieki XVII–XVIII na pewno są nowożytnością. Jeśli zestawimy tytuły rozdziałów II i III, to można dojść do wniosku, że czasy nowożytne zaczęły się w Polsce w 1795 roku (pierwszy rozbiór Polski), a to przecież nieprawda. Autor uważa, że okres rozbiorów skończył się w 1915 roku, ale to jest wątpliwe, ponieważ kraj odzyskał niepodległość w 1918 roku. Tak więc, okres międzywojenny nie zaczął się w 1915 roku, ale także nie skończył się w 1940 roku, gdyż trwał w latach 1918–1939. Jest jednak problem z latami II wojny światowej. Duda zdecydował się na wyodrębnienie lat 1939–1945 jako przedmiotu osobnego rozdziału, mianowicie VII (datą początkową jest w tym rozdziale 1939 rok, a nie 1940). Ma to swoje oczywiste uzasadnienie, ponieważ był to czas szczególny. Z drugiej strony, rozdział VII jest bardzo krótki – ma 16 stron, gdy inne co najmniej po kilkadziesiąt. W tym znajdują się dość zdecydowane sądy o przebiegu II wojny światowej w jej początkowym przebiegu. Czy jednak książka o historii matematyki jest właściwym miejscem dla rozstrzygania spornych problemów historii politycznej i to z punktu widzenia pewnej wersji tzw. poprawności politycznej? W żadnej mierze nie umniejszając znaczenia agresji ZSRR na Polskę w 1939 roku, mam wątpliwość, czy okupacja (jeśli w ogóle stosować to słowo; jest też zresztą problem z okupacją litewską) radziecka (wolę ten przymiotnik niż „sowiecka"; to są zagadnienia słownikowo-semantyczne, a więc drugorzędne) może być traktowana na równi z niemiecką. Przy wszystkich represjach ze strony władzy radzieckiej na Kresach Wschodnich, trudno je porównywać z tym, co działo się w Generalnej Guberni. Jeśli już przyjąć, że lata 1939–1945 nie należą ani do okresu przedwojennego, ani do okresu powojennego i zasługują na odrębne potraktowanie, to jednak na uwagę zasługują nie tylko represje i straty, ale także osiągnięcia wielu matematyków (podobnie zresztą, jak przedstawicieli innych dyscyplin), którzy żyli i pracowali w okupowanej Polsce lub na emigracji, na przykład Alfred Tarski

i Stanisław Ulam (akurat nie są wymienieni wśród emigrantów na str. 312–315) nie tylko wyjechali z Polski, ale wiele osiągnęli w latach 1939–1945, a nie byli przecież odosobnionymi wyjątkami. Te kwestie są poruszone w książce zbyt zdawkowo.

Bardzo dużą zaletą książki Romana Dudy jest pokazanie historii matematyki polskiej w szerokiej perspektywie kulturowej, w szczególności akademickiej. To zrozumiałe, że kontekst matematyczny odgrywa rolę zasadniczą. Znaczy to, że polska myśl matematyczna jest ulokowana na tle tego, co działo się w matematyce polskiej. Autor wykonał benedyktyńską pracę, aby wydobyć to wszystko, co było ważne w matematyce polskiej i porównać ją z tym, co miało miejsce w świecie matematycznym. Mam dwie uwagi krytyczne. Po pierwsze, zabrakło wskazania na wydatną rolę matematyki arabskiej dla rozwoju matematyki europejskiej. Trochę to dziwi z uwagi na domniemania o wpływie Arabów na Kopernika. Po drugie, skoro już czytamy w książce o stopniowym upadku nauki i kultury polskiej „u progu czasów nowożytnych", warto by, chociażby krótko, wskazać na przyczyny tego regresu. Jedną z nich, może nawet główną, była przestarzała koncepcja nauczania gimnazjalnego i akademickiego, reprezentowana wszędzie, głównie przez jezuitów, ale skutecznie ograniczana w krajach zachodniej Europy, natomiast panująca w Polsce aż do II połowy XVIII w. Jeśli chodzi na przykład o filozofię, to myśl polska była najpierw zdominowana przez późną scholastykę, a potem przez tzw. *philosophia recentiorum*, eklektyczną mieszankę teologiczno-naukową. Tak było w Polsce aż do czasów Komisji Edukacji Narodowej i ta okoliczność wyznaczała sposób edukacji. W szczególności, Polacy nie mieli zbyt bliskiego kontaktu z tym, co działo się w ówczesnym swiecie. Okoliczność ta sprawiła, że polskie uniwersytety stały się prowincją (Uniwersytet Krakowski był uczelnią prawdziwie międzynarodową w XVI wieku) a w Polsce nie pojawiły się ani towarzystwa naukowe, ani akademie nauk. Czas zaborów nie sprzyjał nadrobieniu zaległości, ale nie został stracony, zwłaszcza po 1865 roku i autor słusznie poświęcił osobny rozdział pięćdziesięciu latom od tego momentu do wybuchu I wojny światowej.

Matematyka w Polsce była obecna od – powiedzmy – Witelona (lub nawet wcześniej), miała się lepiej lub gorzej, ale nie odgrywała większej roli w świecie. Gdyby ktoś zajmował się prognozowaniem rozwoju matematyki światowej, powiedzmy w 1915 roku, pewnie wymieniłby Francję, Niemcy, Rosję, Stany Zjednoczone, Wielką Brytanię i Włochy jako dominujące w kreowaniu idei matematycznych w następnych latach. Przypuszczam, że nawet Polacy nie „wpadliby" na malowanie przyszłości matematyki polskiej w nadmiernie optymistycznych barwach. I tu dochodzimy do fenomenu wskazanego przez Maldenbrota, aby jeszcze raz przywołać to nazwisko. Nic dziwnego, że Duda poświęca więcej niż połowę narracji w swojej książce temu, co stało się w matematyce polskiej po 1918 roku (faktycznie po 1915 roku, ale tę kwestię już poruszyłem). Myślę, że bardzo wielu czytelników *Historii matematyki polskiej* będzie oczekiwać w niej odpowiedzi na pytanie, jak to się stało, że powstała Polska Szkoła Matematyczna oraz osiągnęła tak niebywały rozwój i tak wielkie znaczenie w świecie. Oczekiwa-

nie to jest niewątpliwie spełnione – Roman Duda poświęcił bardzo wiele miejsca przedstawieniu, jak do tego doszło. Uczynił to w sposób, by tak rzec, niestandardowy. Zwykle powiada się tak. W 1918 roku ukazał się I tom czasopisma *Nauka Polska*, w którym został opublikowany tzw. program Janiszewskiego kreślący odważny projekt rozwoju matematyki polskiej i kładący podwaliny pod powstanie Polskiej Szkoły Matematycznej z jej koncentracją na teorii mnogości i topologii oraz ich aplikacji w innych działach matematyki, wliczając w to także podstawy matematyki. Janiszewskiemu bardzo zależało na umiędzynarodowieniu matematyki polskiej i w tym celu powziął konkretny pomysł wydawania w Polsce międzynarodowego czasopisma pod nazwą *Fundamenta Mathematicae*.

Powyższy obraz jest oczywiście prawdziwy, ale zdecydowanie niepełny. Duda szczegółowo pokazuje (rozdział IV i początek V), że program Janiszewskiego i powstanie Polskiej Szkoły Matematycznej były efektem procesu, który zaczął się w II połowie XIX wieku (autor podkreśla to w podsumowaniu, str. 390–391) i był związany ze Szkołą Główną w Warszawie, ostateczną polonizacją uniwersytetów w Krakowie i Lwowie, powstaniem krakowskiej Akademii Umiejętności, działalnością Kasy im. Mianowskiego, Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, a to wszystko można nazwać pracą organiczną (u podstaw) w sensie pozytywistów warszawskich. Celem tych przedsięwzięć było nie tylko podniesienie oświaty na ziemiach polskich, ale także organizacja życia akademickiego, oficjalnego, jak w Galicji, i półoficjalnego, jak w zaborze rosyjskim i niemieckim, przy czym w tym drugim było ono w zasadzie szczątkowe. Gdy wybuchła I wojna światowa i pojawiły się nadzieje na odzyskanie niepodległości przez Polskę, Kasa im. Mianowskiego zainicjowała szeroką dyskusję nad organizacją i potrzebami nauki polskiej. Wzięło w niej udział trzech matematyków, mianowicie Stanisław Zaremba (Kraków), Stefan Mazurkiewicz (Warszawa) i Zygmunt Janiszewski (do 1918 roku – Lwów, od 1918 roku – Warszawa). Najważniejszy był wspomniany artykuł Janiszewskiego. Roman Duda referuje go zgodnie z oryginalną treścią, a jest to o tyle ważne, że Janiszewski wprawdzie sugerował, aby polscy matematycy skoncentrowali się na jednej dziedzinie matematycznej, ale nie określił, o jaką chodzi. Dopiero potem, aczkolwiek niedługo, teoria mnogości stała się osią matematyki w rozumieniu Polskiej Szkoły Matematycznej. Duda pokazuje (str. 192–193, 204–205), że program Janiszewskiego był kontrowersyjny, gdyż Zaremba miał inną koncepcję matematyki, co sprawiło, że relacje matematyków krakowskich z kolegami z Warszawy i Lwowa (dwoma centrami Polskiej Szkoły Matematycznej) były raczej chłodne. Dlaczego ten fragment recenzowanej książki uważam za osobliwie ważny? Otóż, dlatego, że jest w nim pokazane, iż Polska Szkoła Matematyczna, nie spadła, by tak rzec, z nieba, ale była rezultatem długiego procesu, w którym brało udział wielu zasłużonych ludzi, na przykład Samuel Dickstein. Jeszcze teraz wracając do opinii Mandelbrota, na pewno miłej z „narodowego" punktu widzenia, rozwój matematyki polskiej w XX wieku był efektem przemyślanej i konsekwentnej pracy. Oczywiście, program

Janiszewskiego mógł zostać zrealizowany także dzięki okolicznościom politycznym, entuzjazmowi tych, którzy go realizowali i wreszcie dlatego, ponieważ pojawiła się cała plejada zdolnych matematyków, z których wielu stało się wybitnymi. Biorąc pod uwagę rozmaite fakty, ważnym wydarzeniem była reaktywacja (za zgodą okupacyjnych władz niemieckich) Uniwersytetu Warszawskiego w 1915 roku. To w tej uczelni zaczęto kształcić młodych matematyków w bardzo nowoczesny sposób.

Czytelnik dowie się z książki Dudy nie tylko o kontekście organizacyjnym (uczelnie, ośrodki, wydawnictwa, towarzystwa, kongresy, akademie nauk), ale także o osiągnięciach naukowych w wielu dziedzinach matematyki. Oto wykaz z rozdziału V (podobny jest w rozdziale IX): teoria mnogości, topologia, logika matematyczna i podstawy matematyki, analiza matematyczna, teoria funkcji rzeczywistych, funkcje zespolone, równania różniczkowe, szeregi trygonometryczne i ortogonalne, analiza funkcjonalna, teoria miary, teoria prawdopodobieństwa, geometria różniczkowa, algebra (tutaj są wspomniane prace polskich kryptologów, które zostały zwieńczone złamaniem szyfru „Enigmy" – wydaje mi się, że ten epizod zasługuje na wyodrębnienie go w odrębny paragraf), teoria liczb, matematyka dyskretna, statystyka matematyczna, mechanika, inne (teoria gier, kartografia matematyczna, geometria wykreślna). Autor poświęcił wiele uwagi, i słusznie, wpływowi polskiej matematyki na światowy rozwój tej dziedziny i oceny tego faktu płynące z zewnątrz, tj. z międzynarodowego środowiska matematycznego. Książka Romana Dudy, powtórzę to raz jeszcze, bardzo pięknie wydana, powinna być bestsellerem w historiografii nauki. Nie mam wątpliwości, że powinna być wydana po angielsku.

Jan Woleński
Wyższa Szkoła Informatyki
i Zarządzania w Rzeszowie



Jerzy Ombach, *Rachunek prawdopodobieństwa wspomagany komputerowo dla studentów matematyki stosowanej*, Wydawnictwo UJ, Kraków 2019, 294 str.

Przygotowanie dobrego podręcznika do rachunku prawdopodobieństwa, z którego mogliby efektywnie korzystać studenci studiów pierwszego stopnia, graniczy z niemożliwością. Tego trudnego zadania podjął się jednak Jerzy Ombach. Omawiany podręcznik wyrósł z doświadczeń, które autor zgromadził, prowadząc wykłady z rachunku prawdopodobieństwa dla studentów matematyki stosowanej oraz matematyki w ekonomii na Uniwersytecie Jagiellońskim.

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Układ materiału zawartego w *Rachunku prawdopodobieństwa* jest, wyłączając kilka wyjątków, bardzo klasyczny i zawiera wszystko to, co student kończący kurs teorii prawdopodobieństwa na studiach pierwszego stopnia powinien znać.

I tak, pierwszy rozdział omawianej pozycji został poświęcony przestrzeniom probabilistycznym. Istotnie, autor rozpoczyna swoje rozważania od definicji przestrzeni probabilistycznej – pojawiło się tu naturalnie pojęcie σ-algebry, jednak precyzyjna definicja przeniesiona została do ostatniego, uzupełniającego rozdziału zawierającego podstawy teorii miary i całki. Moje poważne zastrzeżenia – od razu jednak dodam, że nie są one kierowane do autora omawianego podręcznika, lecz bardziej do decydentów wpływających na organizację studiów – budzi konieczność wyłożenia teorii prawdopodobieństwa studentom, którzy nie ukończyli kursu teorii miary i całki. W rezultacie tak podstawowe pojęcia jak σ-algebra czy zmienna losowa pozostają całkowicie nieintuicyjne i bardzo często student operuje nimi w sposób czysto mechaniczny. Doświadczyłem tego, prowadząc wykłady rachunku prawdopodobieństwa dla studentów specjalności modelowanie matematyczne. Na plus trzeba zapisać autorowi, że w dwu ostatnich rozdziałach przygotował kompendium niezbędnej wiedzy – oczywiście bez dowodów, ale mimo to uważny czytelnik może wypracować sobie pewne intuicje teoriomiarowe.

W kolejnych paragrafach pierwszego rozdziału omawiane są następujące zagadnienia: schemat klasyczny, prawdopodobieństwo geometryczne, prawdopodobieństwo warunkowe i wzór Bayesa, a dalej zdarzenia niezależne i przestrzenie produktowe oraz schemat Bernoulliego. Każdy rozdział kończy lista zadań wraz z propozycją symulacji i obliczeń w programie Maple. Zadania są dość standardowe, wybrałem losowo kilka spośród nich i bez trudu rozwiązałem, co zdecydowanie świadczy o ich elementarnej naturze. Biorąc jednak pod uwagę, dla kogo ten podręcznik był pisany, nie powinno to nas specjalnie dziwić. Pełen uznania jestem za to dla pomysłu, aby wzbogacić podręcznik propozycjami symulacji w pakiecie Maple. Zabieg ten podniósł znacząco atrakcyjność wykładu.

Rozdział drugi i następne poświęcone są zmiennym i wektorom losowym. Przybliżenie tego zagadnienia studentom, którzy zetknęli się jedynie ze zmiennymi losowymi pojawiającymi się w schemacie klasycznym, stanowi nie lada sztukę. Udało się to Jerzemu Ombachowi; jego tekst czyta się z wielką przyjemnością, jest on w zakresie, jaki był możliwy do osiągnięcia, ścisły i precyzyjny. Liczne przykłady ułatwiają studentom zrozumienie niełatwego przecież materiału. Odnosi się wrażenie, iż wszystko w tym podręczniku jest głęboko przemyślane – każdy przykład i każde zadanie – i że stoją za tym wszystkim bogate doświadczenia dydaktyczne autora.

Pewne mankamenty związane w wykładaniem teorii prawdopodobieństwa studentom bez przygotowania teoriomiarowego ujawniają się w rozdziale trzecim. Definiując parametry rozkładu, a więc na przykład nadzieję matematyczną, autor zmuszony jest operować całką Lebesgue'a. Myślę, że użyteczne byłoby zamieszczenie kilku przykładów, w któ-

rych obliczone zostałyby proste całki Lebesgue'a w przypadkach rozkładów innych niż dyskretne i ciągłe. Mam obawy, że ta część wykładu może okazać się zbyt abstrakcyjna dla studentów matematyki stosowanej.

O ile ujęcie materiału zaprezentowanego w pierwszych pięciu rozdziałach podręcznika jest dość typowe, o tyle rozdział szósty przynosi zagadnienia rzadko omawiane na wykładach z rachunku prawdopodobieństwa. Znajomość metod Monte Carlo, bo o nich tutaj mowa, jest nie do przecenienia w zastosowaniach matematyki. Z uznaniem trzeba się odnieść do pomysłu włączenia tej niestandardowej, choć bardzo ważnej problematyki do omawianego wykładu.

Bardzo przystępny jest rozdział ósmy, poświęcony łańcuchom Markowa. Biorąc pod uwagę znaczenie teorii procesów Markowa w modelowaniu matematycznym zjawisk biologicznych i ekonomicznych, przybliżenie tej tematyki studentom, którzy w przyszłości będą stosować matematykę, jest znakomitym pomysłem.

Podręcznik Jerzego Ombacha oceniam niezwykle pozytywnie. To bardzo dobrze napisana książka i należy się cieszyć, że na rynku księgarskim ukazała się nowoczesna pozycja z teorii prawdopodobieństwa przeznaczona dla studentów matematyki stosowanej. Myślę, że będą po nią sięgać nie tylko słuchacze kursów prowadzonych na uniwersytetach, ale także studenci politechnik, a może nawet wydziałów i uczelni ekonomicznych. W każdym razie zapotrzebowanie na taki podręcznik jest ogromne.

Tomasz Szarek
Wydział Fizyki Technicznej
i Matematyki Stosowanej
Politechniki Gdańskiej
oraz
Instytut Matematyczny PAN,
oddział w Sopocie



Józef Banaś, Beata Rzepka, *Wykłady matematyki finansowej*, Wydawnictwo Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2019, 194 str.

Książka *Wykłady matematyki finansowej* dotyczy szeroko pojętej arytmetyki finansowej. W przystępny sposób prezentuje podstawy arytmetyki finansowej, które są bardzo istotne dla osób chcących zapoznać się z szeroko pojętymi zastosowaniami matematyki w ekonomii. Na ich temat zostało napisanych już kilka książek w języku polskim. Można do nich zaliczyć m.in. podręczniki *Mate-*

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

matyka w finansach i bankowości autorstwa Mariana Matłoki oraz *Matematyka finansowa* autorstwa Joanny Podgórskiej i Marii Klimkowskiej. Każda z tych pozycji reprezentuje jednak nieco inne podejście do tematu, wobec czego pojawienie się omawianej książki na rynku jest niewątpliwie pożyteczne.

Publikacja porusza wszystkie ważne zagadnienia z punktu widzenia podstaw matematyki finansowej. Jej konwencja jest przejrzysta. Składa się ona z dziesięciu rozdziałów. W pierwszym omówiono zagadnienie oprocentowania, zwracając szczególną uwagę na jego rodzaje. Drugi dotyczy równoważności stóp procentowych przy różnych okresach kapitalizacji, a trzeci i czwarty odpowiednio efektywnej i przeciętnej stopy procentowej. Piąty rozdział dotyczy inflacji i uwzględnia także zagadnienie realnej stopy procentowej, szósty wartości pieniądza w czasie, siódmy dyskonta handlowego, ósmy weksli. W dziewiątym omawiany jest problem rent oraz kredytów, a w dziesiątym oceny inwestycji finansowych. Każdy z rozdziałów rozpoczyna się od przedstawienia zarysu pojawiających się w nim pojęć. Co ważne, wszystkie one zostały jasno zdefiniowane, z zachowaniem chronologii. Poszczególne wzory i zależności zostały wyprowadzone krok po kroku. Niestandardowym, a zarazem ciekawym elementem rozdziału ósmego jest porównanie pojęć związanych z pożyczkami i wekslami, które z czysto matematycznego punktu widzenia są tożsame. W rozdziale dziewiątym przydatnym zabiegiem jest zilustrowanie płatności poszczególnych rent na osi czasu. W rozumieniu zagadnień czytelnikowi niewątpliwie pomogą liczne zadania z rozwiązaniami, które nie sprowadzają się jedynie do podania właściwych wzorów i podstawienia danych. Są one z reguły opatrzone obszernym komentarzem wyjaśniającym istotę problemu, jakiego dotyczy zadanie. Na końcu każdego z rozdziałów zamieszczone są zadania do samodzielnego rozwiązania. Pierwsze zadania są łatwe, sprowadzają się do podstawienia danych do wzoru. Dalsze wymagają pełnego zrozumienia zagadnienia i zastosowania kilku wzorów.

Mimo niewątpliwych walorów książki, na które zwróciłem uwagę w poprzednim akapicie, konieczne jest też sformułowanie kilku uwag krytycznych.

Pierwsza z nich dotyczy małego powiązania części omawianych w książce zagadnień z realiami rynków finansowych. Oczywiście w podręczniku dotyczącym matematyki finansowej główny nacisk powinien być położony na zagadnienia ilościowe, niemniej czytelnik, który uważnie zapoznał się z książką i rozwiązał zadania powinien potrafić odnieść zdobytą wiedzę do rzeczywistych produktów finansowych. Podręcznik z założenia przeznaczony jest dla studentów matematyki, którzy na ogół nie mają szerokiej wiedzy na temat realiów rynków finansowych. Z książki czytelnik nie dowiaduje się, przy jakich instrumentach stosuje się kapitalizację prostą, a przy jakich złożoną. Nie jest jasna motywacja wprowadzenia zagadnienia kapitalizacji ciągłej, która osobie niemającej szerszej wiedzy na temat modeli rynku może wydawać się pojęciem zupełnie abstrakcyjnym. O ile samo zagadnienie inflacji zostało wyjaśnione dość precyzyjnie, to czytelnik nie dowiaduje się, jakie jest podłoże tego zjawiska i od czego zależy poziom inflacji. Cha-

rakteryzując dość szeroko pojęcie weksli, autorzy nie wspomnieli, jaki jest cel emitowania tych papierów wartościowych i kto jest głównym uczestnikiem ich rynku. W kontekście dostępnych obecnie na rynku produktów finansowych niepotrzebny wydaje się podrozdział 1.2 dotyczący roku bankowego (360 dni) i kalendarzowego. Ostatnim papierem wartościowym w Polsce rozliczanym według bazy 360 dni były bony skarbowe, których emisji zaniechano w 2013 roku. Obligacje, weksle, lokaty i rachunki oszczędnościowe są od dawna rozliczane według bazy 365 dni, a przy wykorzystaniu kapitalizacji miesięcznej banki naliczają oprocentowanie proporcjonalnie do liczby dni okresu bazowego. Warto zaznaczyć, że liczenie efektywnej stopy procentowej przy założeniu równych okresów kapitalizacji zamiast rzeczywistych długości miesięcy będzie prowadziło do pomijalnie małych obciążeń wyników.

Kolejna krytyczna uwaga dotyczy braku sformułowania wagi i znaczenia poszczególnych pojęć oraz ich zastosowania. W przypadku zagadnienia dyskonta autorzy wskazali, że stosuje się je przy dyskontowaniu weksli i wycenie bonów skarbowych. Ta krótka informacja daje czytelnikowi orientację co do potencjalnego wykorzystania tego narzędzia i – biorąc pod uwagę, że jest to podręcznik z matematyki finansowej – można ją uznać za całkowicie wystarczającą. W przypadku pojęć związanych z oceną projektów inwestycyjnych zabrakło takich motywacji. Wewnętrzną stopę zwrotu można wykorzystać chociażby przy ocenie rentowności obligacji kuponowych dostępnych na rynku wtórnym. W rozdziale dotyczącym rent także nie wyjaśniono, do czego służy pojęcie renty. Czytelnik mający pierwszy raz do czynienia z zagadnieniem może postawić pytanie, dlaczego – jeśli z czysto matematycznego punktu widzenia zagadnienie rent jest równoważne strumieniom pieniędzy – stosuje się w tym przypadku inne oznaczenia.

Ostatnia uwaga krytyczna dotyczy układu książki. Ma ona przejrzystą strukturę samych rozdziałów, ale cała byłaby łatwiejsza w odbiorze, gdyby wprowadzono w niej pewne drobne korekty, które pomogłyby czytelnikowi usystematyzować sobie pojęcia. Równoważność stóp procentowych przy różnego rodzaju kapitalizacji ma związek z efektywną stopą procentową. Ta ostatnia jest przecież wyłącznie konsekwencją zastosowanego okresu kapitalizacji. Wydaje się więc, że zasadne byłoby połączenie rozdziału drugiego i trzeciego. Dyskonto handlowe wykorzystuje się obecnie wyłącznie do wyceny weksli, dlatego rozsądne byłoby scalenie rozdziału siódmego i ósmego. Renty i kredyty z matematycznego punktu widzenia mają podobną konstrukcję, niemniej z uwagi na specyfikę zagadnień w przypadku jednych i drugich stosuje się odmienne oznaczenia, co zrobili również autorzy recenzowanej książki. Z tego względu wskazane byłoby, aby podrozdziały 9.2 i 9.3 były częścią osobnego rozdziału dotyczącego kredytów. Biorąc pod uwagę rosnącą popularność leasingu w Polsce (wartość umów leasingowych zawartych w 2019 roku w Polsce była wyższa niż kredytów hipotecznych), w podręczniku warto by uwzględnić wzory, przykłady i zadania dotyczące tej formy finansowania. Jego opis można by przedstawić w tym samym rozdziale co kredyty.

Duży wkład pracy autorów, którzy precyzyjnie i jasno opisali klasyczne zagadnienia matematyki finansowej oraz przygotowali liczne przykłady ilustrujące zagadnienia, przełożył się na powstanie książki, która może ułatwić studentom dobre zrozumienie elementarnych zagadnień z matematyki finansowej i być solidnym wsparciem dla prowadzących wykłady i ćwiczenia z przedmiotu. Mam nadzieję, że krytyczne uwagi, które sformułowałem w niniejszej recenzji, przysłużą się temu, że kolejne wydanie podręcznika jeszcze lepiej sprawdzi się w tej roli.

Piotr Płuciennik
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
w Poznaniu

Wiad. Mat. 56 (1) 2020, 171–174
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Książki nadesłane

Bartosz Brożek, *Marzenie Leibniza. Rzecz o języku religii*, Copernicus Center Press, Kraków 2016, 96 str.

Autor opowiada o pomyśle Leibniza stworzenia uniwersalnego języka nauki zwanego przezeń *characteristica universalis*, o języku, w którym można mówić o Bogu i jego atrybutach, o związkach języka ze światem rzeczywistym i z działaniami człowieka w tym świecie.

Michał Heller, *Wykład, który wstrząsnął światem*, Copernicus Center Press, Kraków 2016, 98 str.

Jest to fascynująca opowieść o rozwoju geometrii, w tym o geometrii nieeuklidesowej i o znaczeniu dla matematyki pomysłów Riemanna wyłożonych po raz pierwszy w jego wykładzie habilitacyjnym w 1854 roku.

Ennio De Giorgi, *O matematyce i mądrości*, Copernicus Center Press, Kraków 2017, 87 str.

Jest to wybór popularyzatorskich wykładów i artykułów, których głównym tematem są wzajemne relacje pomiędzy matematyką a ogółem ludzkiej wiedzy, w tym także związki łączące matematykę z religią. Autor stara się pokazać, że matematyka jest dostępna zwykłemu człowiekowi, nie jest żadną hermetyczną dyscypliną, że jest nauką żywą, obecną na co dzień, rozwijającą wyobraźnię i wyzwalającą umysł od ograniczeń.

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

David Acheson, *Krótka podróż w głąb matematyki*, tłumaczenie Małgorzata Dąbrowska-Kowalik, Witold Sikorski, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2019, 137 str.

Autor opowiada w sposób przystępny o rozmaitych zagadnieniach matematyki, zarówno klasycznych, jak i współczesnych. Mamy więc m.in. opowieści o liczbach zespolonych, o liczbie π i liczbie e, o mostach w Królewcu, o liczbach pierwszych, o rachunku różniczkowym i całkowym itd. Matematykę przedstawia się tu jako grę, pokazuje się jej piękno i magię.

Józef Banaś, Beata Rzepka, *Wykłady matematyki finansowej*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2019, 195 str.

W książce przedstawiono podstawowe wiadomości z zakresu teorii procentu, a więc oprocentowanie kapitału, teorię dotyczącą weksli oraz rent. Przeanalizowano także różne elementy związane z teorią wyceny instrumentów finansowych. Książka przeznaczona jest dla studentów matematyki Politechniki Rzeszowskiej do wykorzystania w ramach zajęć z matematyki finansowej.

Tony Crilly, *Matematyka. 50 idei, które powinieneś znać*, tłumaczenie Wiktor Bartol, wyd. 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2019, 264 str.

Jest to jedna z pozycji serii *50 idei, które powinieneś znać*. Wprowadzają one w świat pytań i zagadnień, które od dawna towarzyszą ludziom w próbach zrozumienia świata. Książka przynosi analizę i wyjaśnienie pięćdziesięciu fundamentalnych zagadnień z zakresu matematyki, zarówno teoretycznych, jak i praktycznych. Odsłania tajemnice sudoku, łamania szyfrów, loterii i hazardu, zarządzania finansami, procentu składanego. Mowa w niej też o najnowszych osiągnięciach i problemach matematycznych, w tym o rozstrzygnięciu wielkiego twierdzenia Fermata i o hipotezie Riemanna.

Piotr Zarzycki, *Modelowanie pojęć matematycznych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 2019, 176 str.

Książka poświęcona jest kształtowaniu się pojęć matematycznych w procesie nauczania matematyki. Autor opowiada o liczbach, funkcjach, mierzeniu i prawdopodobieństwie. Książka powstała na podstawie wykładów z modelowania wybranych pojęć matematycznych, które autor prowadził w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego.

Jim Holt, *Idee, które zmieniły świat. Od Einsteina i Gödla po Turinga i Dawkinsa*, tłumaczenie Tomasz Lanczewski, Copernicus Center Press, Kraków 2020, 493 str.

Zgodnie z tytułem autor, amerykański filozof i pisarz, opowiada o pomysłach, które wpłynęły na dzieje nauki, w szczególności na dzieje matematyki, fizyki i filozofii. Mamy tu więc opowieści o Gödlu i jego twierdzeniach o niezupełności i pracach nad teorią względności, o hipotezie Riemanna, o ojcu statystyki, o Mandelbrocie i fraktalach, o twierdzeniu o czterech barwach, o Cantorze i o nieskończoności, o imiesławiu i twórcach deskryptywnej teorii mnogości, o wielkościach nieskończenie małych, o Adzie Lovelace i komputerach, o Turingu, o Dawkinsie, o nowych poglądach na kosmos i wielu, wielu innych zagadnieniach. Świetnie napisane, czyta się znakomicie.

Roman Murawski, *Lógos and Máthēma 2. Studies in the Philosophy of Logic and Mathematics*, Peter Lang Internationaler Verlag der Wissenschaften, Berlin 2020, 224 str.

Książka jest zbiorem trzynastu prac poświęconych różnym zagadnieniom filozofii matematyki i logiki. Można je podzielić na dwie grupy. Pierwsza z nich zawiera prace poświęcone pewnym ogólnym problemom filozofii matematyki, podczas gdy druga przynosi prace, w których rozważa się różne zagadnienia z historii logiki w Polsce oraz wkład polskich logików i matematyków do filozofii logiki i matematyki. Mowa więc m.in. o znaczeniu tzw. matematyki odwrotnej, o dowodzie w matematyce, o statusie tezy Churcha, o ideach fenomenologicznych w filozofii matematyki, o matematyce vs teologii, o problemie prawdy oraz o filozofii logiki i matematyki w Polsce w dwudziestoleciu międzywojennym.

Alfred S. Posamentier i Bernd Thaller, *Liczby, ich dzieje, rodzaje, własności*, tłumaczenie Bogumił Bieniok i Ewa L. Łokas, Prószyński i S-ka, Warszawa 2020, 392 str.

Jest to książka popularnonaukowa wprowadzająca w świat liczb. Autorzy to matematycy amerykańscy: Posamentier jesr profesorem w Mercy College w Dobbs Ferry w stanie Nowy Jork, Thaller zaś jest profesorem matematyki stosowanej na uniwersytecie w Grazu. Autorzy opowiadają m.in. o genezie liczb i liczeniu, o historycznym rozwoju systemów liczbowych, o różnych interesujących własnościach liczb, o liczbach w sztuce (poezji, muzyce, architekturze, malarstwie), o rozmaitych interesujących liczbach, o ciągach Fibonacciego, o filozoficznych koncepcjach dotyczących liczb.

James Stewart, *Calculus. Rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej zmiennej*, tłumaczenie Małgorzata Dąbrowska-Kowalik, Witold Sikorski, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2020, 972 str.

Ta potężna książka jest tłumaczeniem na język polski najpopularniejszego w USA podręcznika z zakresu rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej. Omawia się w niej takie zagadnienia, jak granice, pochodne, zastosowania pochodnych, całki, zastosowania całek, funkcje odwrotne, metody całkowania, równania różniczkowe, równania parametryczne i współrzędne biegunowe, ciągi i szeregi nieskończone. W każdym rozdziale znajdujemy – obok wyjaśnień teoretycznych – liczne przykłady. Na końcu zaś zadania (w sumie jest ich dwa i pół tysiąca), które zostały podzielone na trzy grupy: sprawdzian rozumienia definicji i znajomości twierdzeń, quiz polegający na udzielaniu odpowiedzi „tak" lub „nie", zadania dodatkowe. Do zadań zamieszczono rozwiązania bądź wskazówki.

Jakub Szczepaniak, *Igrzyska matematyczne. Niebanalne zadania dla młodych olimpijczyków*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2020, 303 str.

Książka jest zbiorem trzystu osiemdziesięciu jeden zadań, które są rozwiązane metodami matematyki elementarnej. Zadania trudniejsze poprzedzono krótkimi wstępami teoretycznymi. Zadania przedstawiono w formie prawdziwych opowieści. Książka składa się z czternastu rozdziałów poświęconych takim zagadnieniom, jak grafy, prawdopodobieństwo, równania diofantyczne, zbiory, prędkość, droga i czas, zasada szufladkowa Dirichleta itd. Autor jest znanym propagatorem matematyki, uczestniczył w tworzeniu zadań do konkursów i olimpiad matematycznych.

Vanessa Vakharia, *Sposób na matmę*, tłumaczenie Bogumił Bieniok i Ewa L. Łokas, Prószyński i S-ka, Warszawa 2020, 152 str.

Pięknie wydana, ślicznie ilustrowana książka mająca pomóc uczniom opanować, ale też polubić matematykę. Składa się z dwóch części. Część pierwsza przynosi wskazówki dotyczące uczenia się, część druga zaś poświęcona jest liczbom. Mówi się tu o działaniach na liczbach, o ułamkach i procentach. Autorka kieruje działalnością pracowni matematycznej o nazwie The Math Guru w Toronto.

Opracowanie: Roman Murawski (Poznań)